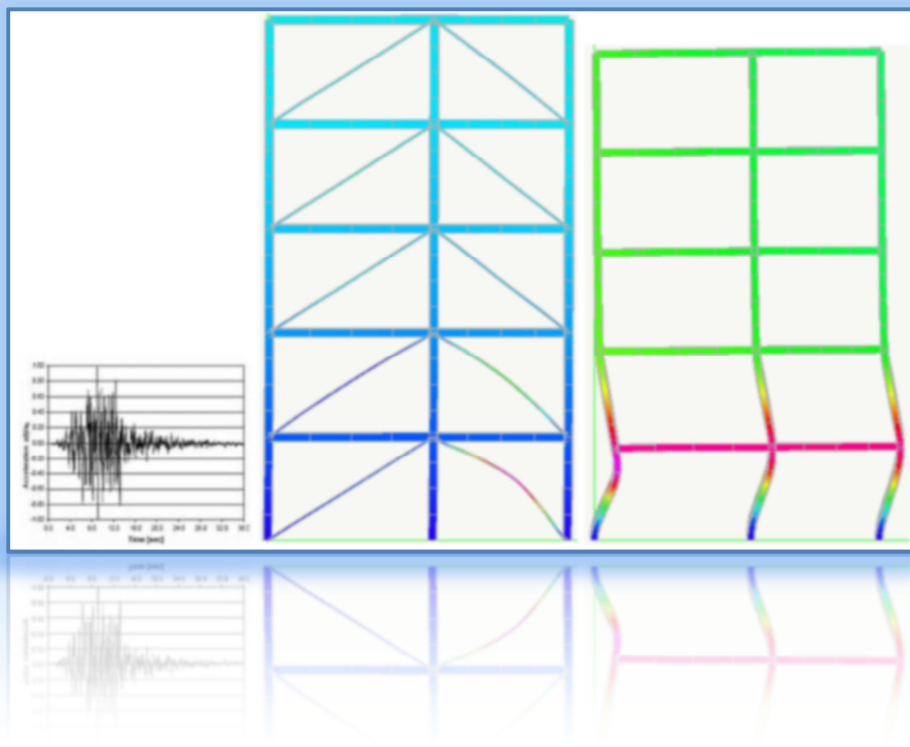


Affidabilità dell'ambiente EE di Nòlian all-in-one . Test di validazione su modelli strutturali a comportamento fortemente non lineare

Francesco Oliveto , Ingegnere – utente Nòlian All-In-One – Softing S.r.l

Francesco Canterini, Ingegnere – collaboratore – Softing S.r.l



1. SOMMARIO

In questo secondo studio sulla stabilità delle strutture , partendo da quanto evidenziato nel lavoro precedente dagli studi teorici presentati nella bibliografia e dagli esempi numerici effettuati tramite l'utilizzo della piattaforma software EE di Nòlian All in one, si vogliono approfondire ulteriori aspetti della risposta strutturale quali:

1. Validazione dei modelli ed analisi non lineare disponibili in Nòlian EE tramite il confronto dei test teorici e sperimentali riportati nella letteratura scientifica;
2. Introduzione alla studio della stabilità in campo dinamico, con particolare riferimento ai telai in acciaio, con esempi significativi che per motivi di spazio saranno proposti nel prossimo floating point.

Per ognuno degli argomenti trattati, saranno svolti esempi significativi ed evidenziati gli aspetti peculiari della risposta strutturale e come tarare le procedure non lineari informatiche.

2. METODI E MODELLI NUMERICI NON LINEARI

In questo capitolo tratteremo in maniera molto sintetica e compatta i metodi di analisi non lineari necessari al tracciamento del percorso di equilibrio pre e post-buckling . Si farà riferimento alle analisi non lineare per sola geometria, per materiale o entrambe ed ai metodi di soluzione. Le fasi che conducono alla determinazione della risposta non lineare delle strutture, devono prevedere l'automazione dei seguenti metodi :

A. IL METODO DI INCREMENTO DELLE AZIONI (CARICHI/SPOSTAMENTI)

- 1) in controllo di carico;
- 2) in controllo di spostamento;
- 3) in controllo della risposta;
- 4) in controllo dell'arco di curva o Arch-Length.

B. IL METODO ITERATIVO NEL PASSO DI CARICO

- 1) Il metodo di Newton Raphson Standard;
- 2) Il metodo di Newton Raphson Modificato;
- 3) Il metodo della rigidità iniziale;
- 4) I metodi "Quasi Newton " o secanti ;
- 5) Il metodo della " Line Search " .

C. LA MODALITÀ DI CONVERGENZA E ARRESTO DEL PROCEDIMENTO ITERATIVO

- 1) Convergenza a livello globale e locale all'elemento;
- 2) Test di convergenza sull'equilibrio delle forze;
- 3) Test di convergenza sull'equilibrio degli spostamenti;
- 4) Test di convergenza sulla minimizzazione dell' Energia;
- 5) Scelta della tolleranza a seconda del test.

D. METODO DI RISOLUZIONE DEL SISTEMA DI EQUAZIONI

- 1) Il metodi diretti e iterativi ;
- 2) Il metodo della Decomposizione o Cholesky;
- 3) Il metodo del gradiente coniugato preconditionato ;
- 4) Metodo di eliminazione alla Gauss o del gradiente biconiugato preconditionato ;

2.1. Metodi di controllo delle azioni sulle strutture

Le strutture possono essere analizzate in campo non lineare, tracciando i relativi percorsi di equilibrio. Le azioni possono applicarsi in diversi modi (vedi fig.1).

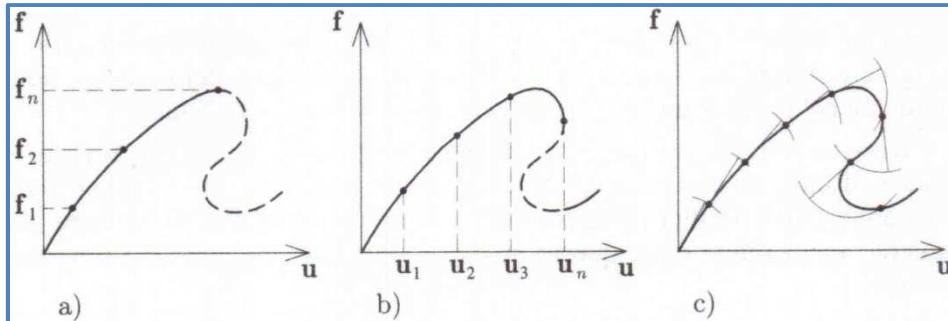


Fig.1 : Possibili tipi di controllo delle azioni applicate alle strutture: a) in controllo di carico; b) di spostamento; c) della lunghezza dell'arco di curva (da Iori et.al -2002)

La scelta tra le diverse opzioni non è nota priori e dipende dal problema in esame. Da quanto riportato in fig.2, si può osservare:

1. È possibile agire in controllo di carico fino al punto limite B, oltre il quale la soluzione dovrebbe saltare al punto D, troppo distante per la buona convergenza del metodo incrementale iterativo.
2. Operando in controllo di spostamento è possibile tracciare i rami di softening BC e di hardening CDEFG. Arrivati in G il brusco comportamento non lineare associato al fenomeno dello snap-back può causare problemi di convergenza che difficilmente con un solo salto si riesce a raggiungere il punto I.

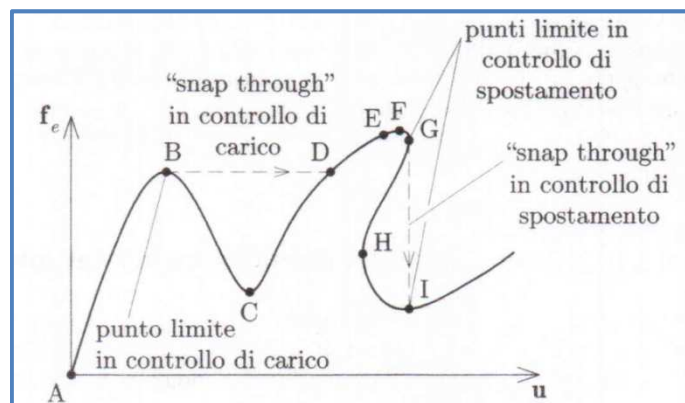


Fig.2 : Scelta del tipo di controllo delle azioni applicate alla struttura (da Iori et.al -2002)

3. La risposta in snap-back può essere tracciata con procedimenti tipo Arch-Length methods (controllo misto forza spostamento), oppure è possibile operando in controllo automatico della risposta ossia modificando il punto di controllo ovvero il grado di libertà o entrambi. L'applicazione del correttivo sul metodo iterativo tipo line-Search può migliorare la soluzione raggiunta.

2.2. Metodi Incrementali - Iterativi

Per introdurre in maniera semplificata il problema, si consideri una struttura generica discretizzata tramite il metodo agli elementi finiti. Indicando con \mathbf{u} il vettore degli spostamenti nodali, con \mathbf{f}_e il vettore dei carichi nodali esterni e con $\mathbf{f}_i(\mathbf{u})$ il vettore delle forze nodali interne equivalenti agli sforzi nella stessa struttura, l'equazione

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) - \mathbf{f}_e = \mathbf{g}(\mathbf{u})$$

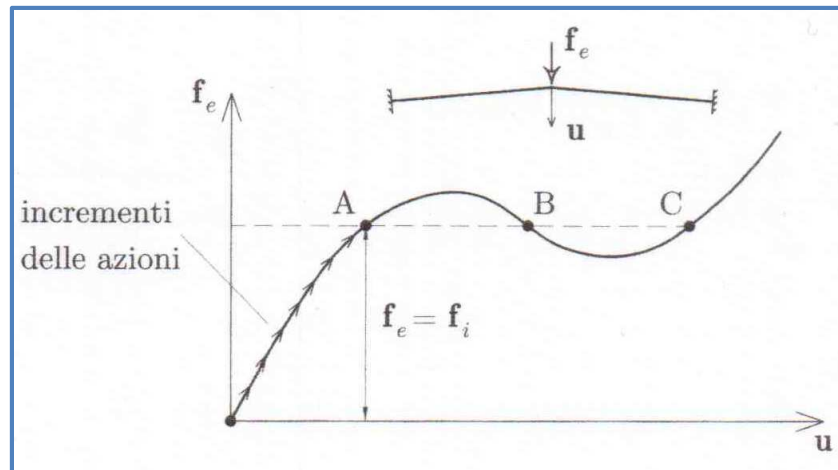


Fig.3 : esempio di soluzioni multiple a parità f_e per problemi strutturali non lineari (da Iori et.al -2002)

Rappresenta la condizione di equilibrio che coincide con l'annullamento dello squilibrio o residuo $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ tra le forze esterne e quelle interne.

Si supponga il problema non dipendente dal tempo ed inoltre che le forze esterne \mathbf{f}_e siano indipendenti dagli spostamenti \mathbf{u} . L'unico vettore delle forze dipendente da \mathbf{u} sono in virtù della non linearità geometrica e meccanica le forze \mathbf{f}_i funzione della posizione corrente della struttura.

Gli spostamenti \mathbf{u} si ricavano risolvendo iterativamente il sistema di equazione non lineare dato dall'equazione sopra riportata.

Se il problema è lineare la soluzione è sempre unica, in problemi non lineari questo non è sempre vero, in quanto ad uno stesso livello di forze esterne possono corrispondere più soluzioni (vedi fig.3) tipo A, B, C, pertanto la soluzione trovata non è necessariamente quella cercata.

Per avere quindi la soluzione reale (se esiste), è necessario seguire la storia di carico e risposta della struttura, con un procedimento incrementale con una suddivisione del carico totale in step o passi in numero dipendente dal problema esaminato. Generalmente utilizzare più step comporta una soluzione accurata ma con sforzi computazionali maggiori, viceversa soluzioni meno accurate e velocità di analisi.

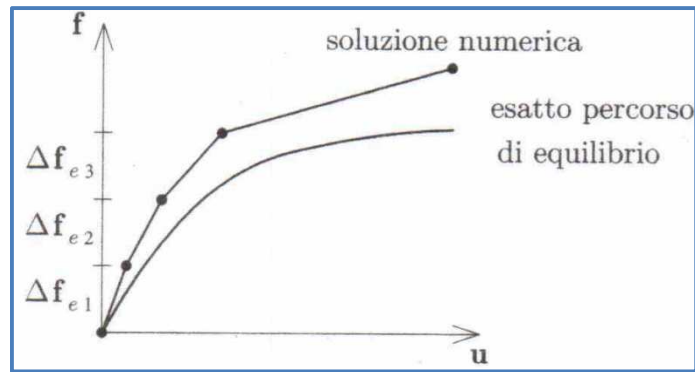


Fig.4 : Accrescimento dell'errore nella soluzione puramente incrementale (da Iori et.al -2002)

Indipendentemente dagli step o passi di carico, una soluzione puramente incrementale accresce degli errori dovuti al non perfetto annullamento dello squilibrio $g(u)$ residuo che si somma di volta in volta comportando una deviazione della soluzione numerica dall'esatto percorso di equilibrio (vedi fig.4).

Per cui la strategia d'intervento è quello di abbinare al metodo incrementale un metodo iterativo nel generico passo di carico che annulli o quanto meno minimizzi lo squilibrio $g(u)$.

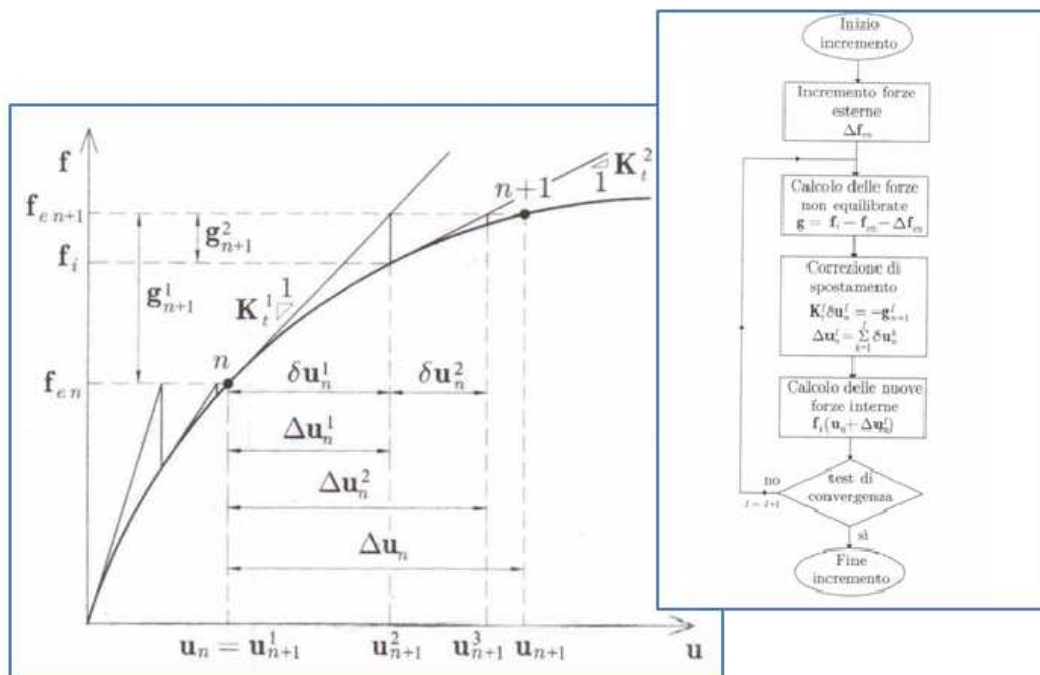


Fig.5 : Il metodo iterativo di Newton -Raphson - schema iterativo a blocchi(da Iori et.al -2002)

Un analisi di questo tipo permette:

- Di ottenere , tra tutte le soluzioni valide dal punto di vista matematico quelle aventi interesse ingegneristico;
- Di osservare il comportamento della struttura al crescere delle azioni , evidenziando fenomeni di biforcazione, di snap through o snap back che si possono incontrare prima di raggiungere il collasso;
- Di seguire il comportamento path-dependent dei materiali plastici o viscoplastici ;

Tenuto conto di ciò nascono i cosiddetti metodi iterativi alla Newton Raphson, che si basano sullo sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine del vettore di squilibrio o residuo $\mathbf{g}(\mathbf{u})$, tra le forze esterne ed interne. Trascurando i passaggi del metodo noto a tutti in letteratura, si riportano le equazioni risolvono il problema. Si definisce matrice di rigidezza tangente della struttura \mathbf{K}_t^1 la seguente espressione:

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_{n+1}^1) = \frac{\partial f_i(u)}{\partial u}(u_{n+1}^1) = K_t^1$$

Per cui l'equazione di Taylor diventa alla generica iterazione :

$$K_t^1 \cdot \delta u_n^1 = -g_{n+1}^1 \rightarrow u_{n+1}^2 = u_{n+1}^1 + \delta u_n^1$$

Ripetendo negli altri punti, 1,2,3-I, si arriva all'equazioni generali del problema iterativo:

$$K_t^I \cdot \delta u_n^I = -g_{n+1}^I \rightarrow u_{n+1}^{I+1} = u_{n+1}^I + \delta u_n^I \text{ con } I=1,2,3\dots$$

Quindi all'ultima iterazione abbiamo la stima degli spostamenti nel passo da sommare a quelli del passo precedente:

$$u_{n+1} \simeq u_{n+1}^{I+1} + \delta u_n^I \simeq u_n + \Delta u_n^I \text{ con } \Delta u_n^I = \sum_{k=1}^I \delta u_n^k$$

Dal punto di vista geometrico si osserva che la funzione viene approssimata iterativamente con la sua tangente nel punto. Con la prima iterazione $I=1$ si incrementano le azioni e segue la fase di previsione, linearizzando il problema nell'intorno della soluzione, mentre nelle successive iterazioni $I=2\dots n$ si apporta la fase di correzione tramite l'annullamento dello squilibrio residuo fino ad ottenere la soluzione. Tale algoritmo è chiamato predictor-corrector. Normalmente si sceglie come punto iniziale del ciclo iterativo il valore della soluzione al passo precedente che è stabile. Il metodo di Newton Raphson ha diverse varianti che hanno ognuna il suo ordine di convergenza della soluzione che non è altro che una velocità e stabilità. I metodi N-R più noti sono:

- **N-Rs**, metodo standard che richiede ad ogni iterazione il calcolo della matrice di rigidezza tangente e la risoluzione del sistema lineare. Queste due operazioni sono molto onerose dal punto di vista computazionale. Il metodo funziona bene se la matrice tangente ha un'espressione completa, velocità e convergenza dipendono, a seconda del caso, da problemi di divergenza nei punti singolari;
- **N-RM**, metodo modificato che prevede il ricalcolo della matrice di rigidezza alla prima iterazione di ogni passo di carico e mantenendola costante durante la fase di correzione, questo metodo risulta molto più stabile e robusto del precedente in quanto le operazioni di risoluzione del sistema e di calcolo della matrice nel primo punto che è di equilibrio riducono l'onere computazionale e gli eventuali errori.

- **N-R_{M0}** , una variante del metodo modificato è quello della matrice di rigidezza iniziale K_0 , in questo caso la matrice viene assemblata e fattorizzata una sola volta e con i termini elastici (struttura indeformata e materiali elastici). In assoluto richiede il minor onere computazionale per ogni iterazione ma in presenza di forti non linearità geometriche in cui la matrice tangente può essere molto diversa da quella iniziale la convergenza si rallenta se non addirittura non converge. D'altro canto il metodo è molto robusto in presenza di non linearità meccanica con scarichi tensionali proporzionali alla rigidezza iniziale.

Per migliorare il metodo della matrice iniziale si usano metodi combinati (vedi fig.6) nel quale alla prima iterazione di ogni passo di carico si usa la matrice elastica e poi dalla seconda per incorporare le non linearità geometriche si ricalcola la matrice tangente e si prosegue con N-R modificato, in questo modo la matrice K_T non è mai molto deformabile che è la maggiore causa di problemi di convergenza.

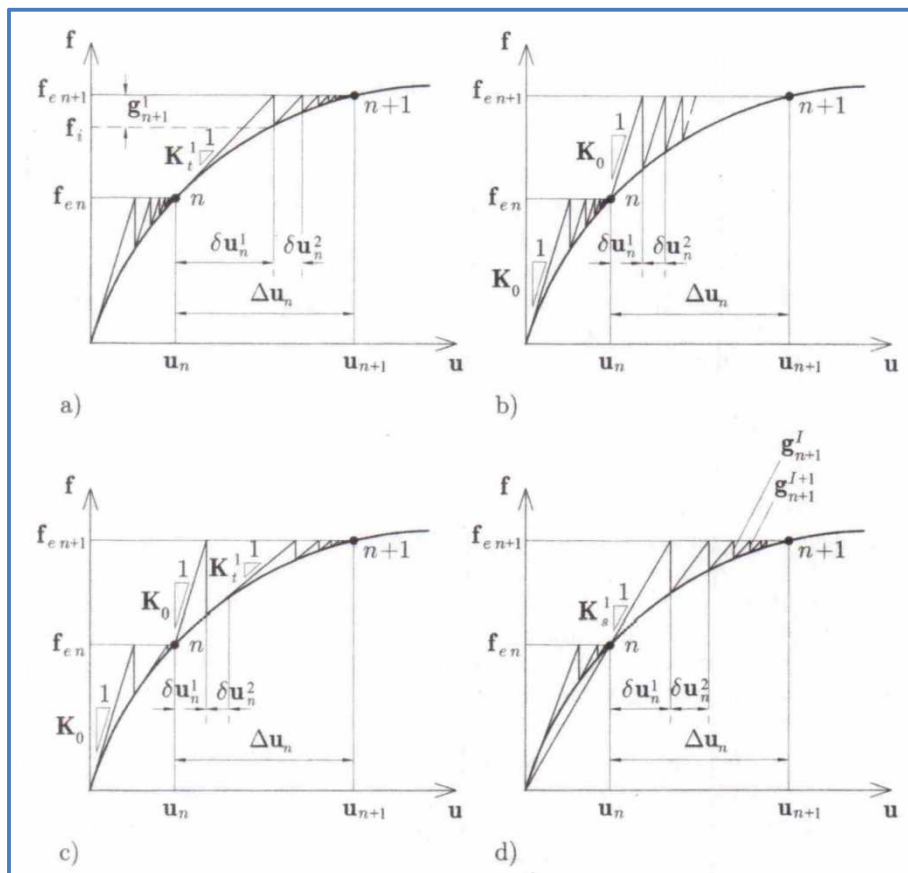


Fig.6: Alcuni metodi iterativi modificati: a) N-R_M modificato; b) rigidezza iniziale; c) rigidezza iniziale seguito da Newton Raphson modificato; d) Metodo quasi newton (da Iori et.al -2002)

Esistono infine i metodi quasi Newton che fanno ricorso ad altre matrici lungo il percorso di equilibrio, si ricorre a questi quando, non abbiamo disponibile la matrice tangente in quanto ha una formulazione troppo complessa oppure onerosa da un punto di vista computazionale.

2.3. Criteri di convergenza

Il metodo iterativo tipo Newton – Raphson può raggiungere la convergenza quando la soluzione approssimata alla i -esima iterazione è ritenuta sufficientemente accurata.

Risulta quindi indispensabile introdurre un parametro che misuri l'accuratezza della soluzione e la definizione del valore minimo oltre il quale la stessa sia accettabile, ossia stabilire un test o criterio di convergenza.

Normalmente esistono almeno tre criteri di convergenza che si basano:

1. Sull'equilibrio delle forze ;
2. Sugli spostamenti;
3. Sulla variazione dell'energia;

i criteri sono del tipo

$$\mathbf{g}^I \leq \varepsilon \cdot \mathbf{g}^1 \quad \text{oppure} \quad \delta \mathbf{u}^I \leq \varepsilon \cdot \delta^1$$

dove ε è la tolleranza dipendente dai criteri, e $\mathbf{g} - \delta \mathbf{u}$ sono le norme del vettore delle forze squilibrate e degli spostamenti.

I criteri possono essere utilizzati singolarmente oppure contemporaneamente. Le soglie limite o tolleranza dipendono dal tipo di problema e dal tipo di misura del parametro di controllo se locale all'elemento o globale dell'intera struttura.

Normalmente si accettano sull'equilibrio tolleranza $\varepsilon \approx 10^{-3}$, per gli spostamenti $\varepsilon \approx 10^{-6}$, per l'energia $\varepsilon \approx 10^{-4}$. Si rimanda alla letteratura specializzata per ulteriori approfondimenti.

2.4. Risoluzione del sistema delle equazioni

La soluzione del problema incrementale iterativo nelle analisi non lineari delle strutture conduce alla fine per ogni step di carico o iterazione la soluzione del sistema lineare sottoriportato:

$$\delta \mathbf{u}_n^I = -(\mathbf{K}_t^I)^{-1} \cdot \mathbf{g}_{n+1}^I$$

Generalmente la soluzione non viene mai calcolata tramite l'inversione della matrice \mathbf{K}_T , in quanto metodi numerici risultano molto più efficienti, in termini di precisione velocità e occupazione della memoria dell'elaboratore. I metodi numerici vengono suddivisi in due classi:

- Metodi diretti;
- Metodi iterativi;

I metodi si specializzano in funzione delle proprietà della matrice di rigidezza, che può essere simmetrica e definita positiva.

Nel caso di matrice simmetrica e non singolare i metodi diretti sono i più utilizzati e sono:

- La decomposizione LDL^T ;
- Il metodo di Crout;
- Il metodo di Cholesky , nel caso di matrice definita positiva.

Ad esempio il metodo della decomposizione LDL^T tramite opportune combinazioni trasforma il sistema lineare completo in un sistema equivalente dove le matrici L e D diventano matrici triangolari inferiori (elementi nulli sopra la diagonale) e matrici diagonali, per cui prima si risolve il sistema con la matrice triangolare e a cascata quello con matrice diagonale. Il flusso delle operazioni è il seguente:

$$K_T \cdot \delta u = LDL^T \cdot \delta u$$

$$L \cdot y = -g \rightarrow y ; D \cdot z = y \rightarrow z ; L^T \cdot \delta u = z \rightarrow \delta u$$

Dove y e z sono incognite intermedie. E' stato dimostrato che l'onere computazionale per la risoluzione a cascata dei tre sistemi è minore rispetto all'inversione della matrice di rigidezza. I metodi diretti di questo tipo funzionano bene con materiali a comportamento elastico.

Una matrice di rigidezza ha due caratteristiche importanti:

1. è **sparsa** ossia ha pochi termini non nulli;
2. è a **banda** i termini non nulli si addensano attorno alla diagonale principale;

La forma della matrice dipende dalla numerazione delle incognite degli elementi finiti che non sono altro che la mesh strutturale.

La tecnica delle matrici sparse tende ad evitare e ridurre inutili operazioni tra termini nulli e quindi l'eccessiva occupazione della memoria. Questo è molto difficile da realizzare nei metodi diretti in quanto nella risoluzione a cascata tramite decomposizione la matrice triangolare inferiore L^T può riempirsi superiormente. Ci sono metodi che tendono a ridurre il fenomeno del riempimento (fill-in) il cosiddetto metodo di Cuthill-McKee, che opera riordinando la matrice di rigidezza prima dell'operazione di decomposizione.

Quando la matrice sparsa è di elevate dimensioni si utilizzano normalmente metodi iterativi tipo il gradiente coniugato preconditionato.

Per i problemi di malcondizionamento e matrici quasi singolari e non simmetriche in campo non lineare si utilizzano i metodi diretti di eliminazione alla Gauss o il gradiente biconiugato preconditionato.

In tutto questo si è voluto dare solo un cenno ai metodi, per informazioni più avanzate si rimanda alla letteratura specializzata.

3. TEST DI LETTERATURA E CONFRONTI TRAMITE ANALISI NUMERICA

Lo scopo di questo capitolo è quello di risolvere tramite l'uso della meccanica computazionale agli elementi finiti non lineari alcuni tra i più noti test di letteratura di cui si conosce la risposta post-critica per instabilità in grandi spostamenti/deformazioni. Gli esempi trattati appartengono al fenomeno dell'instabilità per sforzo assiale, che presentano un comportamento post-critico per diramazione stabile (crescente), instabile (decrescente), instabile per cedimento progressivo. Le strutture modello in oggetto sono:

1. L'asta di Eulero in grandi deformazioni – Comportamento post-critico stabile ;
2. Il modello di Riks – Comportamento post-critico stabile o instabile dipendente dal segno delle imperfezioni;
3. Il telaio di Koiter – Roorda n°1 – Comportamento postcritico stabile o instabile dipendente dal segno delle imperfezioni;
4. Il telaio di Koiter –Roorda n°2 – Comportamento per cedimento progressivo con fenomeno di snap – back;
5. L'arco a tre cerniere – instabilità per scatto o cedimento progressivo;

Infine tratteremo due esempi di strutture in acciaio piane, di cui la prima a nodi spostabili con comportamento a telaio (resistente a momento) e la seconda a nodi fissi, del tipo a controventi concentrici. Scopo e finalità delle analisi dinamiche non lineari in grandi spostamenti è l'individuazione del fenomeno dell'instabilità di colonne o controventi se sollecitati da un'azione sismica e la relativa determinazione del valore limite $PGA_{CLV-INST}$ per cui si ha il collasso strutturale.

3.1. La Trave di Eulero in grandi deformazioni

L'esempio classico di una tipologia strutturale che presenta un comportamento post-critico per diramazione stabile è la classica trave di Eulero (vedi fig.7), con formulazione in grandi spostamenti/rotazioni e deformazioni.

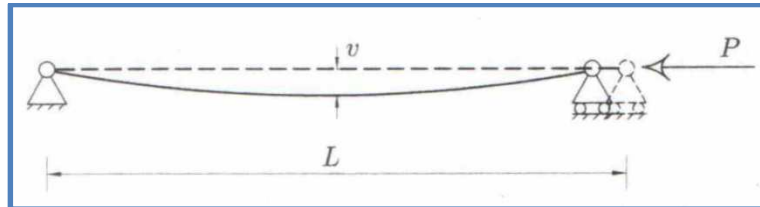


Fig.7 : Struttura con instabilità postcritica per diramazione stabile (da Iori et.al -2002)

Per questa struttura è disponibile la soluzione teorica in forma chiusa, determinata facendo le ipotesi che il modo critico fondamentale mantenga la stessa forma lungo il percorso diramato. Per cui scrivendo l'espressione dell'energia potenziale totale EPT e sviluppandola in serie di McLaurin, aggiungendo almeno i termini fino al quarto grado, si ottiene l'equazione del percorso d'equilibrio data dalla seguente formulazione:

$$\frac{v}{L} = \frac{2c}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_E}}$$

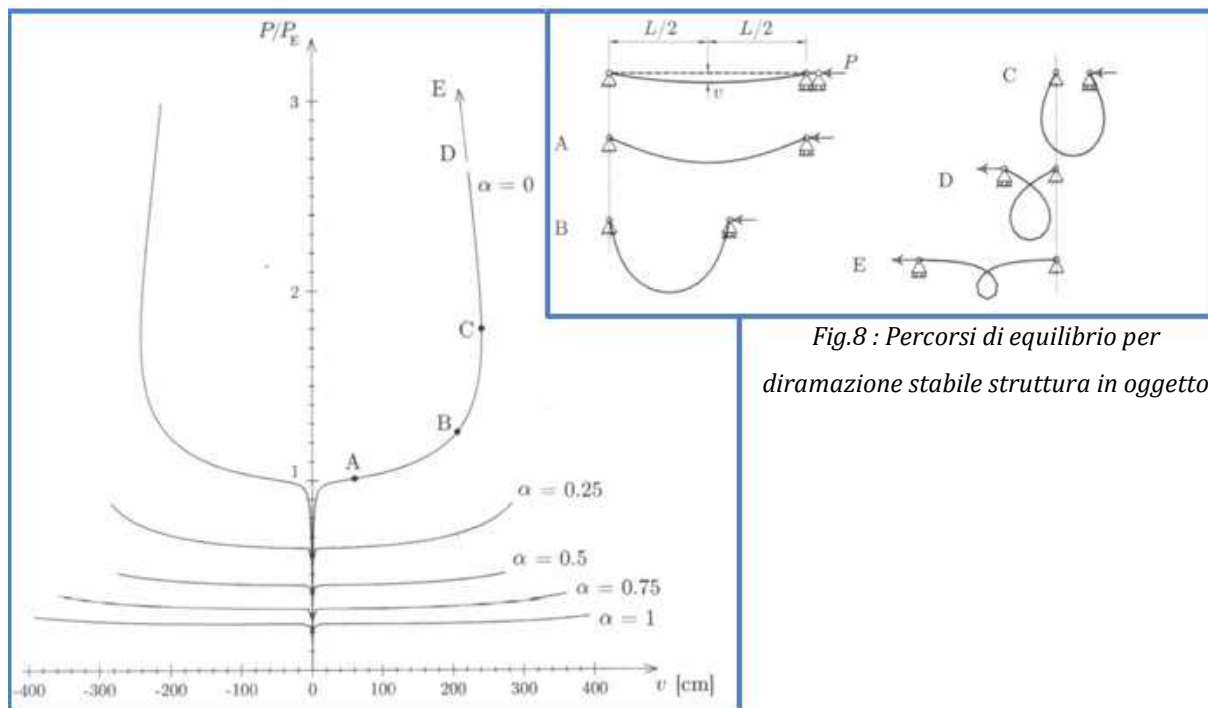


Fig.8 : Percorsi di equilibrio per diramazione stabile struttura in oggetto

dove :

- $P_E = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$ è il carico critico Euleriano;
- c è la soluzione dell'equazione $K(c^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}}$, essendo K l'integrale ellittico di prima specie;

le soluzioni di fig.8 fanno riferimento al modello di fig.7, funzione del parametro α che regola in maniera parametrica la luce L della trave e dell'imperfezione iniziale massima v .

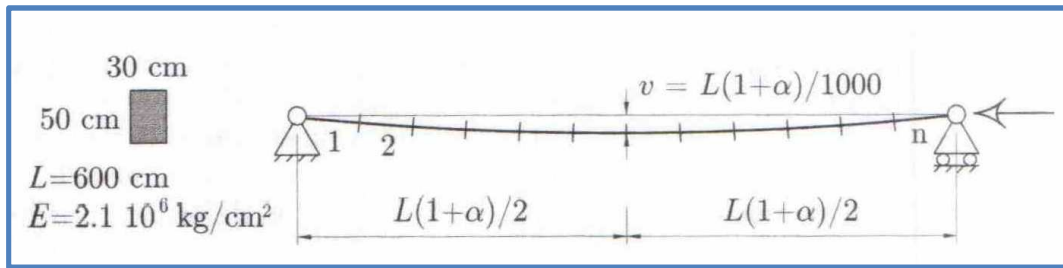


Fig.9 : Modello strutturale FEM con caratteristiche meccaniche e geometriche considerate (da Iori et.al -2002)

Si può osservare in fig.8 che nel caso in cui $L=6\text{ m}$ la rigidità della sezione riesce ad impegnare le risorse inerti in grandi spostamenti e la curva di equilibrio $P-v$ si innalza in modo netto a forma di "calice", nel caso in cui $L=12\text{ m}$ i grandi spostamenti per l'elevata snellezza della trave non riescono a recuperare rigidità in campo post-critico e quindi si presenta il classico percorso con biforcazione orizzontale relativa ai piccoli spostamenti.

Analisi non lineare FEM con Nolian EE

Per la trave di luce 6 metri il carico critico euleriano vale

$$P_E = \pi^2 \frac{EI}{L^2} = 3.14^2 \frac{2.1 \cdot 10^6 \cdot 3.125 \cdot 10^5}{600^2} = 1.80 \cdot 10^7 \text{ kg}$$

Le analisi condotte in Nolian EE riportano nella fig.10, il carico complessivo della struttura, per avere un confronto con la soluzione analitica si rende necessario rapportare la curva a P_E dividendo per quest'ultimo valore ottenendo i punti fondamentali pari a:

CURVA $P/P_E \rightarrow P_E = 1.80 \cdot 10^7$							
P[kg]	$5.0 \cdot 10^6$	$1.0 \cdot 10^7$	$1.5 \cdot 10^7$	$2.0 \cdot 10^7$	$2.5 \cdot 10^7$	$3.0 \cdot 10^7$	$3.5 \cdot 10^7$
P/P_E	0.28	0.56	0.83	1.11	1.39	1.67	1.94

Il confronto con la curva teorica lo effettuiamo in corrispondenza dei punti A, B, C dove sono carichi e spostamenti nonché la configurazione deformata (vedi fig.10).

1. in **A** abbiamo $P/P_E=1.0$ e $v=60$ cm, nel caso di Nolian la rispondenza è perfetta in quanto a 60 cm si ha $P = 1.80 \cdot 10^7 \rightarrow P/P_E = 1,0$.
2. in **B** abbiamo $P/P_E=1.23$ e $v=200$, cm nel caso di Nolian la rispondenza è quasi perfetta in quanto a 200 cm si ha $P = 2.20 \cdot 10^7 \rightarrow P/P_E = 1,22$.
3. in **C** abbiamo $P/P_E=1.80$ e $v=245$, cm nel caso di Nolian la rispondenza è quasi perfetta in quanto a 245 cm si ha $P = 3.20 \cdot 10^7 \rightarrow P/P_E = 1,77$

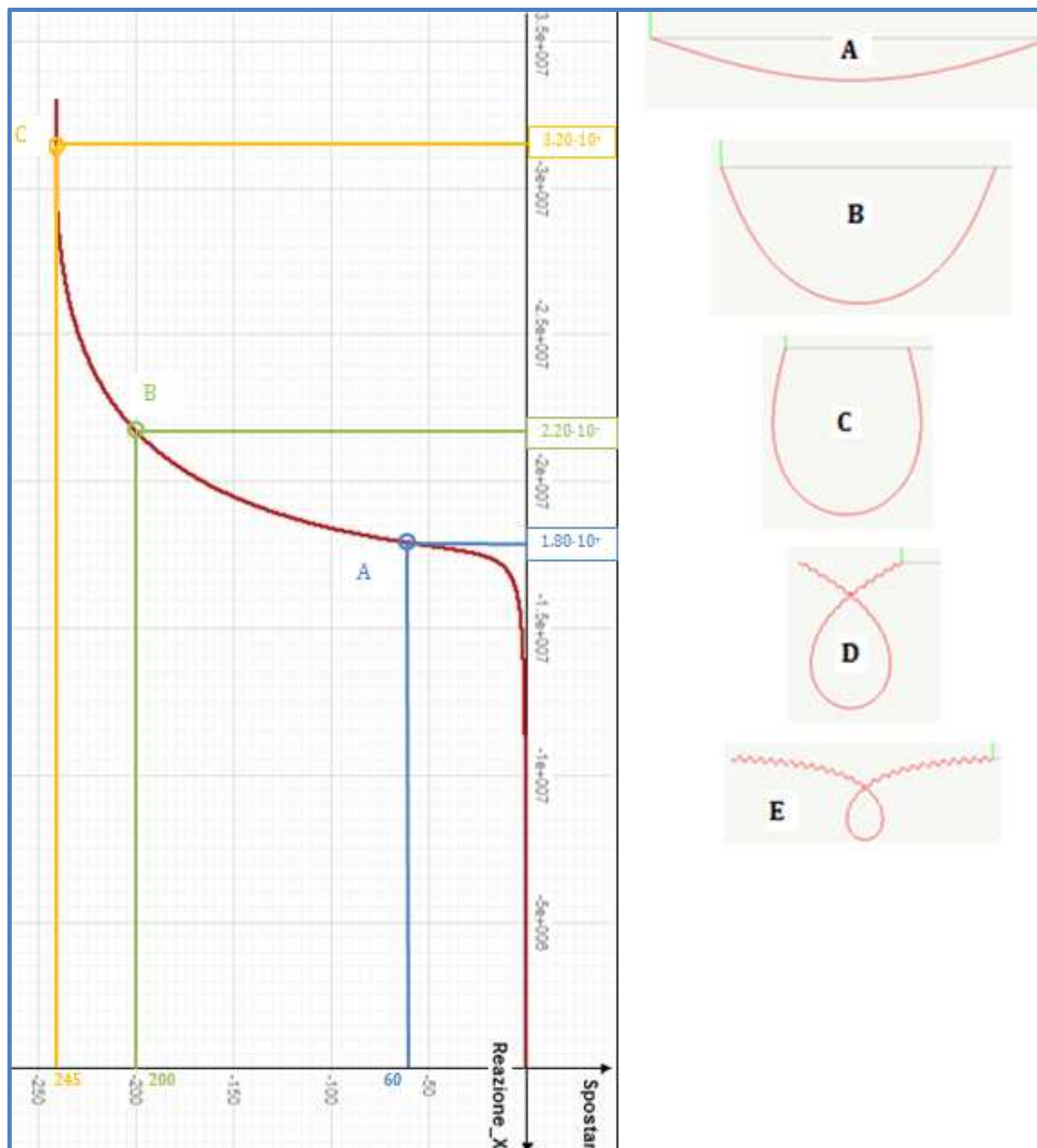
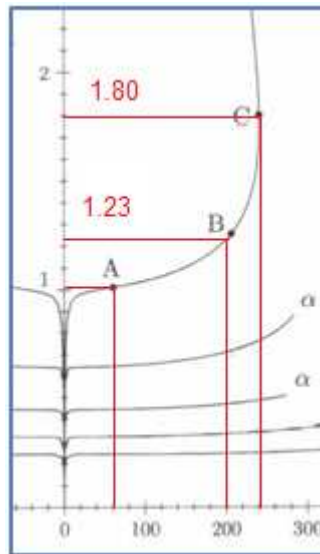


Fig.10 : Percorso di equilibrio post-critico in Nolian EE con configurazioni di equilibrio

Per completezza aggiungiamo una breve descrizione delle configurazioni deformate corrispondenti a D ed E.

Dall'analisi del modello, per tali configurazioni viene mostrato un avvolgimento dell'elemento su se stesso. Ciò nella realtà è privo di significato fisico, ma nel modello è possibile ottenerlo dato che al materiale utilizzato, è stato assegnato un comportamento elastico senza un limite ultimo di deformazione, il che permette di proseguire nel calcolo anche dopo il punto in cui nella realtà il materiale raggiunge il punto di rottura, mentre il risultato non può essere confrontato più con il modello teorico, perché i meccanismi di opposizione alla forza esterna sono differenti rispetto a quelli che entrano in gioco nello studio della instabilità.

Riportiamo anche il valore del rapporto P/P_E letto sulla curva teorica in funzione dei vari valori di ν :



Conclusioni

Dai risultati sopra riportati, si riscontra una rispondenza quasi totale completa tra i valori ottenuti dalla risoluzione analitica delle equazioni che descrivono il problema, e quelli ottenuti tramite la modellazione agli elementi finiti in Nòlian EE.

La corrispondenza dei risultati denuncia la corretta implementazione delle equazioni e del solutore adottato, nonché la corretta modellazione della struttura in esame.

3.1. Il test di Riks

La struttura in esempio riportata in fig.11, è rappresentata da un'asta sufficientemente rigida con altezza $L=350$ cm, area $A=149$ cm² e modulo elastico $E=2.10 \cdot 10^6$ kg/cm², incernierata alla base e collegata ad un molla elastica fissa inclinata a 45° e rigidezza $K=450$ kg/cm. La stessa è caricata da una forza verticale P di intensità variabile ed una orizzontale $H=\xi \cdot P$, dove ξ rappresenta l'eccentricità del carico.

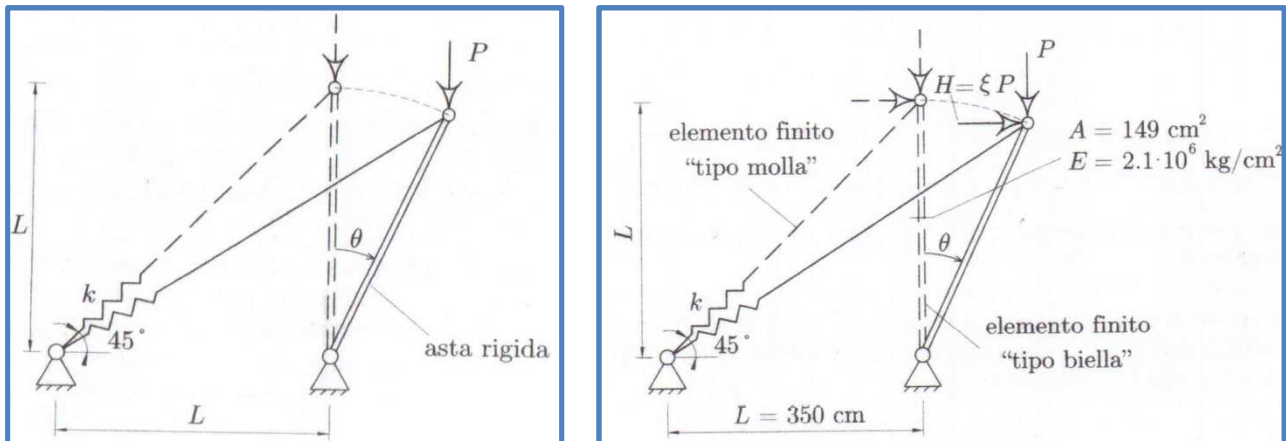


Fig.11 : Struttura con instabilità postcritica per diramazione instabile (da Iori et.al -2002)

Scopo dell'esempio, è la determinazione di:

1. Il carico critico euleriano P_E ;
2. Il comportamento postcritico dell'asta in spostamenti finiti;

Carico critico Euleriano P_E

Il carico critico euleriano si può calcolare con approccio al secondo ordine tramite il metodo energetico o statico. Ipotizzando piccole rotazioni e l'equilibrio nella configurazione deformata in assenza di eccentricità del carico, eguagliando il momento stabilizzante ed instabilizzante si ha con riferimento alla fig.1:

$$M_{INST} = P \cdot L \cdot \theta \quad M_{STAB} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot L^2 \cdot \theta \rightarrow P_E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot L$$

Comportamento post-critico

La determinazione del percorso diramato post-critico consiste nel tracciamento del percorso di equilibrio, nel caso in esame utilizzando il metodo energetico senza restrizioni sull'entità degli spostamenti abbiamo che l'energia potenziale totale nella configurazione deformata definita dall'angolo θ vale :

$$\Pi(\theta) = kL^2 (\sqrt{1 + \sin \theta} + 1)^2 - P \cdot L \cdot (1 - \cos \theta + \xi \sin \theta)$$

Il percorso di equilibrio si ottiene imponendo la stazionarietà dell'energia potenziale, ossia:

$$\frac{d\Pi}{d\theta} = 0 \rightarrow \frac{P}{P_E} = 2 \cdot \frac{\cos \theta - \sqrt{1 - \sin \theta}}{\sin \theta + \xi \cdot \cos \theta}$$

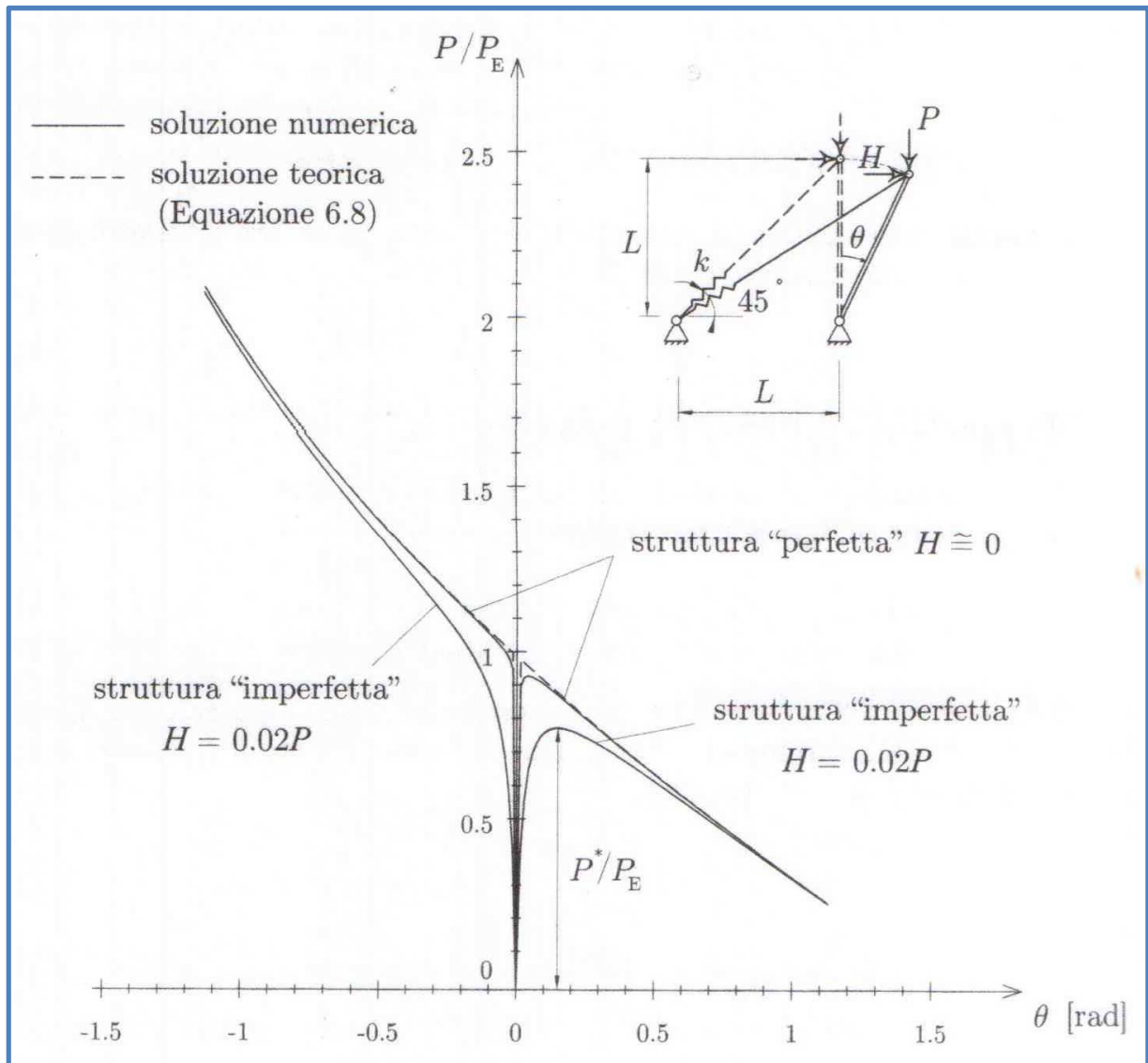


Fig.12 : Percorsi di Equilibrio $P/P_E-\theta$ - Confronto tra soluzione teoriche e numeriche (da Iori et.al -2002)

Come si può osservare dalla fig.12 il percorso diramato presenta un comportamento postcritico asimmetrico, dipendente dall'angolo di inclinazione θ , instabile per $\theta > 0$ e stabile per $\theta < 0$. Nell'esempio sono stati trattati due casi, struttura perfetta $\xi \approx 0$ (± 0.001) e imperfetta (± 0.02). Dalle analisi riportate in figura si può osservare la notevole sensibilità alle imperfezioni per la tipologia in oggetto, infatti basta una piccola forza trasversale $H = +0.02 \cdot P$ che il carico di collasso P^* non raggiunge nemmeno l'80% del carico critico euleriano per biforcazione.

Analisi non lineare FEM con Nolian EE

Per il modello di cui in fig.13, ritto con molla di richiamo elastico il carico critico euleriano vale

$$P_E = \frac{1}{2} K \cdot L = 0.5 \cdot 450 \cdot 350 = 7.875 \cdot 10^4 \text{ kg}$$

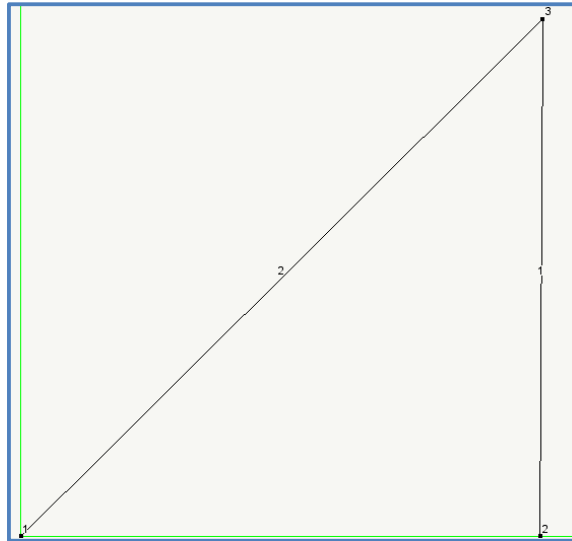


Fig.13 : Modello di Nolian EE – Imperfezione per diramazione instabile

Le analisi condotte in Nolian EE riportano nella fig.4, il carico complessivo della struttura in funzione dello spostamento orizzontale, per avere un confronto con la soluzione analitica ci proponiamo di confrontare il carico critico reale che avendo un comportamento post-critico instabile è inferiore a P_E . La soluzione analitica riporta come carico di collasso il valore di:

$$P/P_E \approx 0.80 \text{ e } \theta = 0.15 \text{ radianti}$$

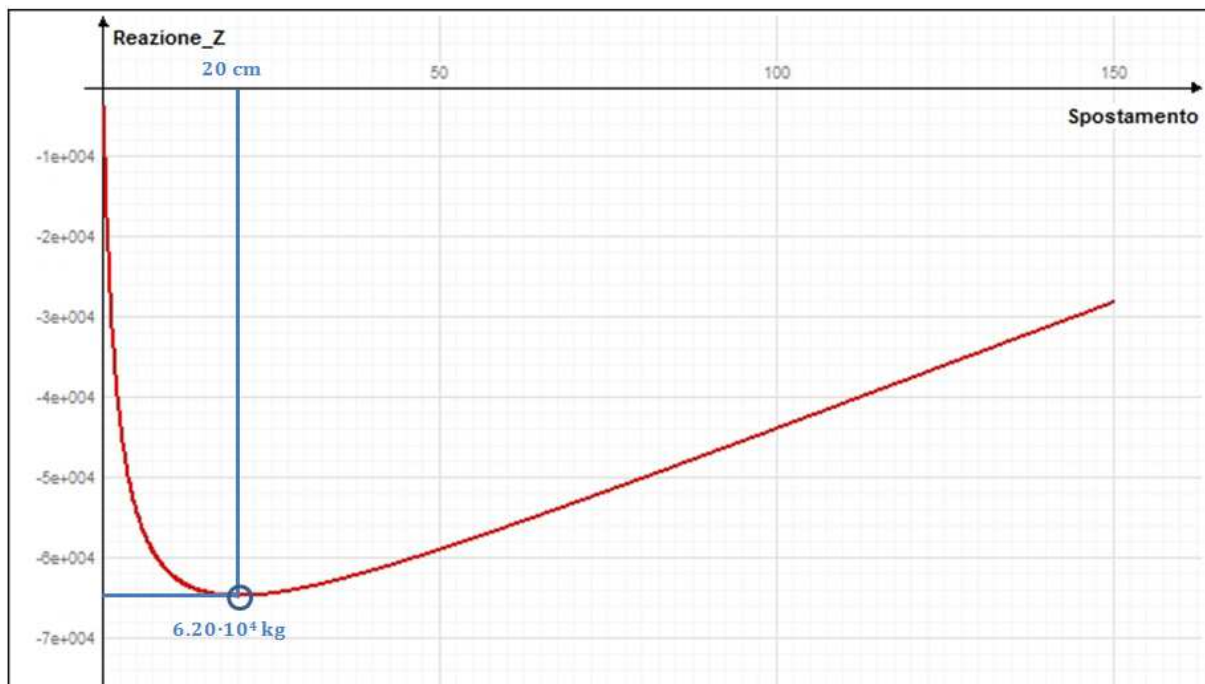


Fig.14 : Percorso di equilibrio post-critico in Nolian EE con indicazioni del carico di collasso

Il valore del carico di collasso pari a $P_C=6.20 \cdot 10^4$ kg che rapportato al carico critico euleriano ci da il valore quasi esatto di letteratura (vedi fig.14):

$$P_C/P_E=6.20/7.875=0.787 \approx 80\%P_E$$

Si può osservare come la fase di softening dopo il picco segue fedelmente la curva teorica.

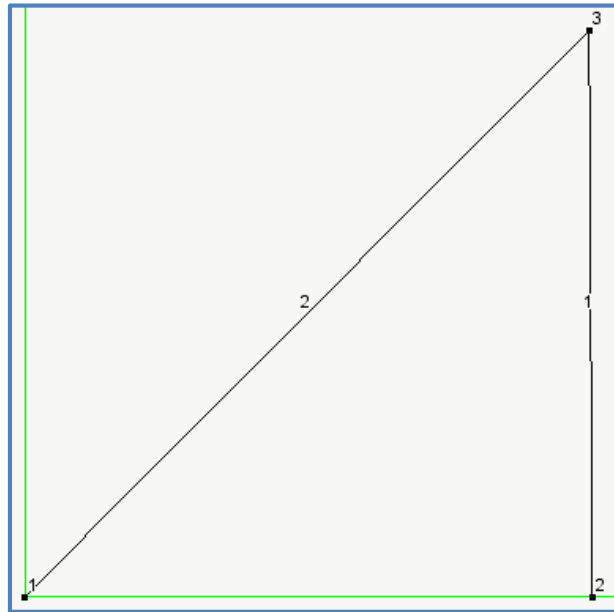


Fig.15 : Modello di Nolian EE – Imperfezione per diramazione stabile

Nel caso di imperfezione che prevede il nodo 3 spostato verso destra rispetto al nodo 2, la risposta post-critica della struttura è quella d fig.16

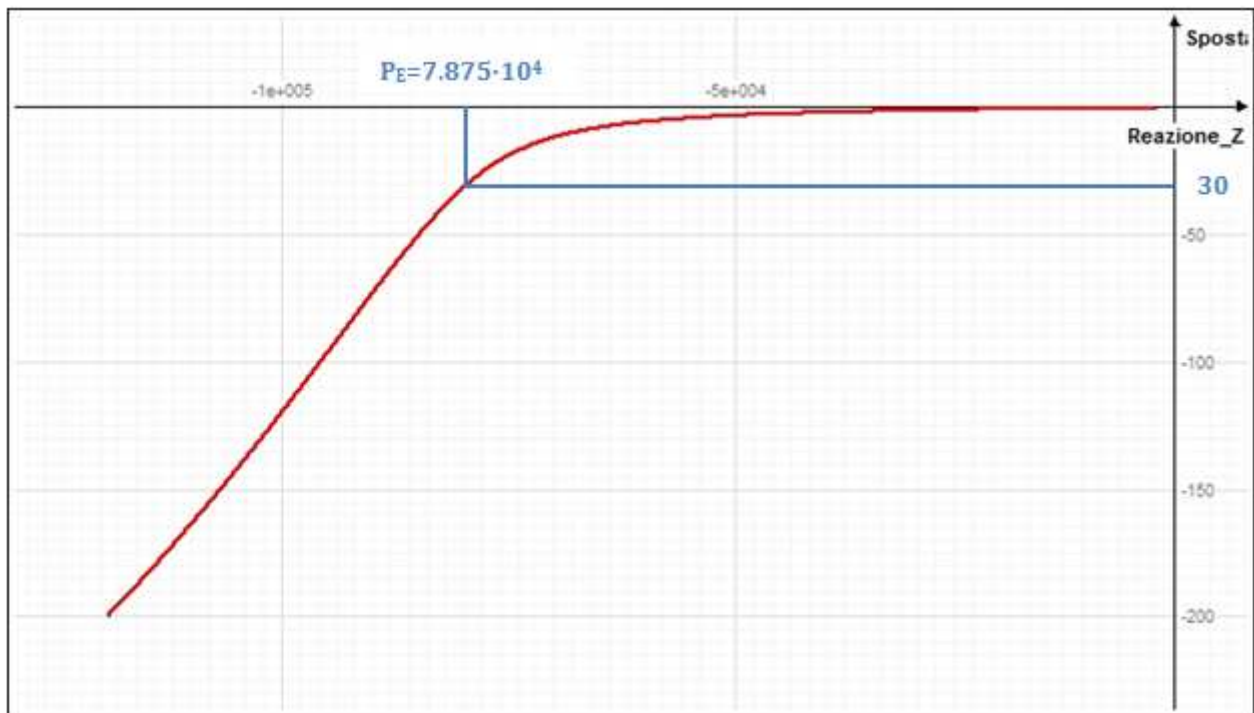


Fig.16 : Percorso di equilibrio post-critico in Nolian EE , il carico di collasso può superare il valore Euleriano anche se a prezzi di spostamenti elevati

In questo caso il risultato restituito dal programma, coincide con quella della curva teorica sino al punto corrispondente ad un carico pari a PE, dopo tale punto l'analisi consente di raggiungere un carico ultimo maggiore, e quindi ci si discosta dalla curva ottenuta dalla teoria. Anche in questo caso, tale effetto è dovuto all'assenza di limiti di deformazione assegnati al materiale.

Conclusioni

La corrispondenza dei risultati denuncia la corretta implementazione delle equazioni e del solutore adottato, nonché la corretta modellazione della struttura in esame.

3.2. Il telaio di Koiter – Roorda 1

Il telaio di Koiter – Roorda, come la struttura precedente risulta sensibile alle imperfezioni e presenta un comportamento postcritico asimmetrico per diramazione instabile (vedi fig.17).

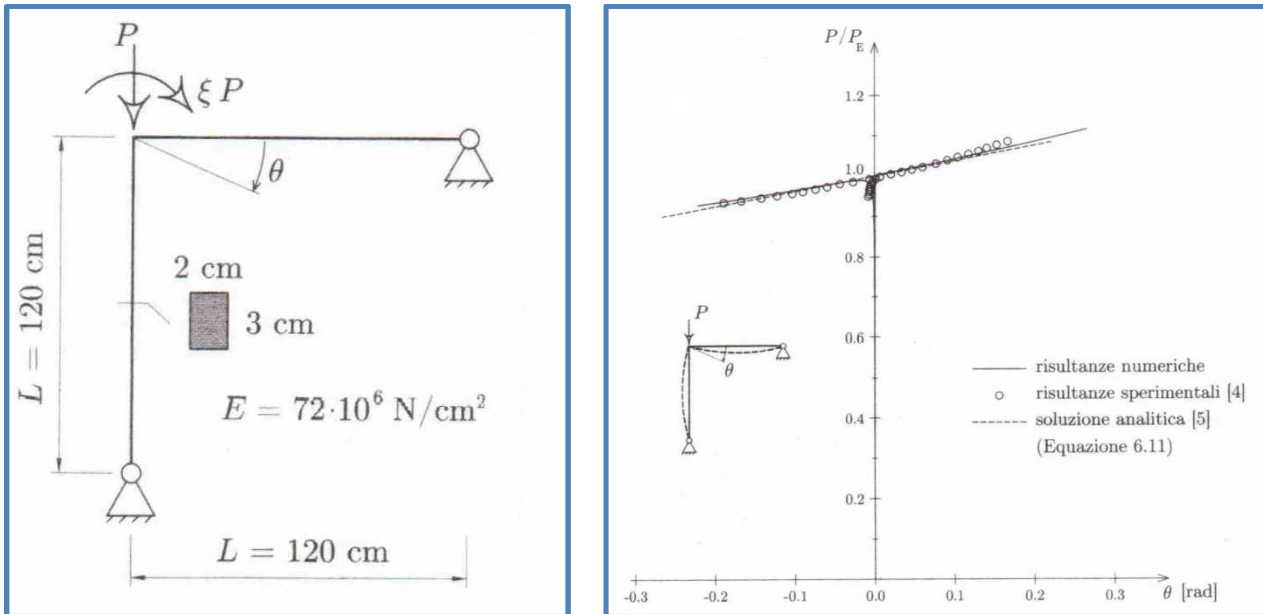


Fig.17 : Schema geometrico e meccanico del telaio. Percorsi di Equilibrio $P/P_E-\theta$ – Confronto tra soluzione teoriche e numeriche (da Iori et.al -2002)

Il calcolo del carico critico Euleriano si può ottenere o come problema agli autovalori della matrice $\mathbf{K}=\mathbf{K}_E-\lambda\mathbf{K}_G$, oppure teoricamente come condizione di stazionarietà dell'energia potenziale totale Π , per cui gli autori ottengono conseguentemente :

$$P_E = 1.406 \cdot \pi^2 \cdot \frac{EI}{L^2}$$

La risposta postcritica della struttura “ senza imperfezioni “ fu ottenuta numericamente e sperimentalmente dagli autori tramite la teoria asintotica , il relativo percorso di equilibrio diramato è dato dalla seguente relazione :

$$\frac{P}{P_E} = 1 + 0.380 \cdot \theta$$

dove θ è la rotazione che identifica la deformata postcritica del telaio.

Analisi non lineare FEM con Nolian EE

Per il modello di cui in fig.18, denominato telaio di Koiter Roorda il carico critico euleriano vale

$$P_E = 1.406 \cdot \pi^2 \cdot \frac{EI}{L^2} = 1.406 \cdot 3.14^2 \cdot \frac{7.2 \cdot 10^6 \cdot 2}{120^2} = 13.862,60 \text{ kg}$$

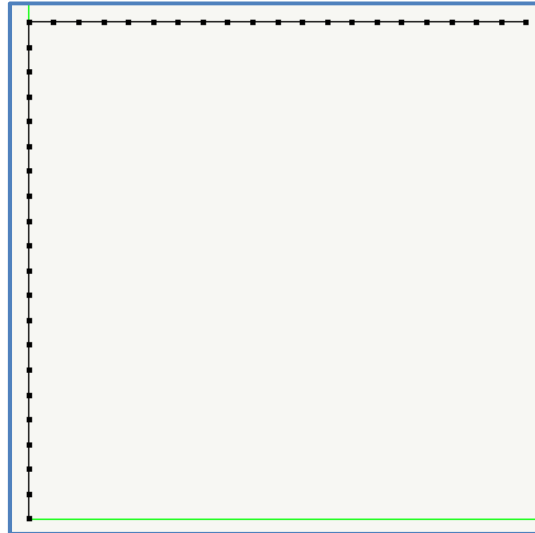


Fig.18 : Modello di Nolian EE – Imperfezione per diramazione instabile

Le analisi condotte in Nolian EE con analisi di buckling lineare riportano in fig.19 la deformata critica ed il relativo autovalore o moltiplicatore di Eulero pari a 13.872. Siccome il carico applicato verticale in testa al ritto è di 1000 kg, si ha che:

$$P_E = 13.872 \cdot 1000 = 13.872 \approx 13.862,60 \text{ (soluzione teorica)}$$

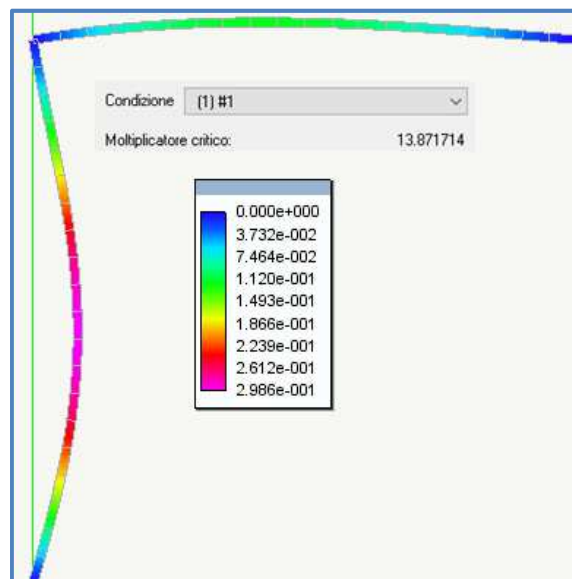


Fig.19 : Analisi di Buckling Lineare – Modo critico e relativo moltiplicatore

L'analisi post-critica è sensibile alle imperfezioni ed soprattutto al segno che nel caso di un $\theta < 0$ abbiamo un comportamento instabile riportato in fig.20



Fig.20 : Percorso di equilibrio post-critico in Nolian EE , il carico di collasso non può superare il valore Euleriano che rappresenta il carico di collasso per piccoli spostamenti, già per moderati spostamenti il valore si riduce

per valori di $\theta > 0$ abbiamo un comportamento stabile riportato in fig.21

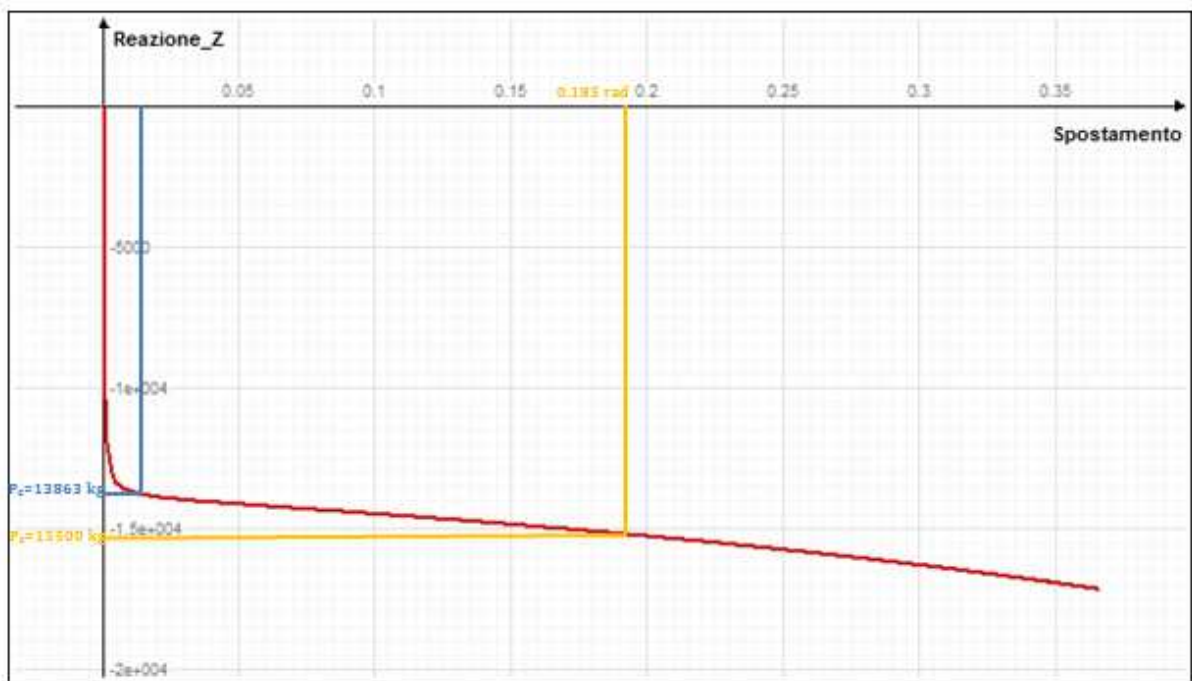


Fig.21: Percorso di equilibrio post-critico in Nolian EE , il carico di collasso può superare il valore critico Euleriano anche se a prezzo di spostamenti elevati per cui il carico di collasso può identificarsi con P_E

Conclusioni

La corrispondenza dei risultati denuncia la corretta implementazione delle equazioni e del solutore adottato, nonché la corretta modellazione della struttura in esame.

3.3. Il telaio di Koiter - Roorda 2

Il telaio di Koiter Roorda, all'aumentare dell'eccentricità del carico P , mostra un percorso di equilibrio non per diramazione instabile, ma un comportamento fortemente non lineare per instabilità a cedimento progressivo con la presenza del fenomeno di Snap-Back (vedi fig.22).

COMPORAMENTO POST CRITICO DEL TELAI0 - PERCOSO P-v

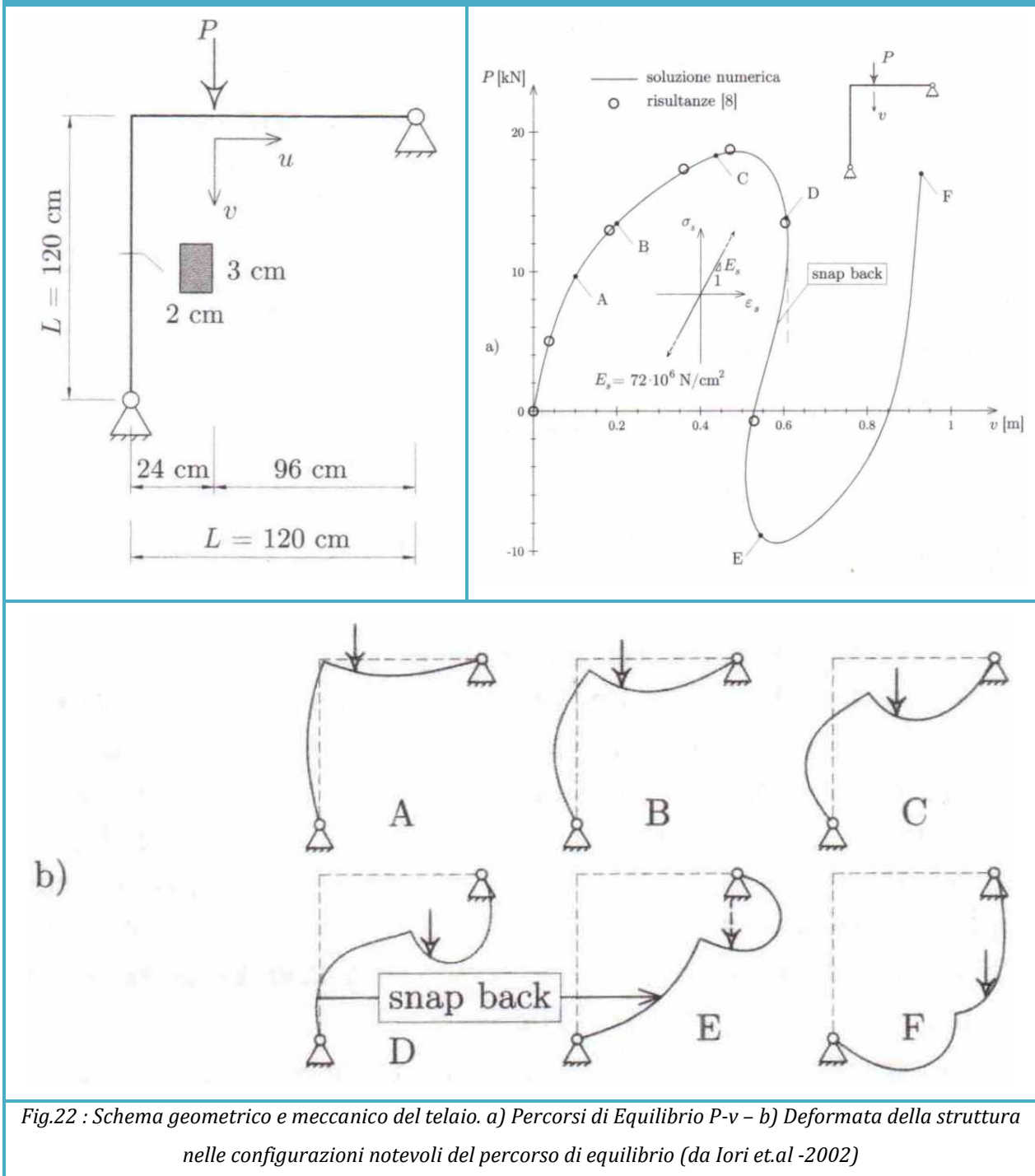


Fig.22 : Schema geometrico e meccanico del telaio. a) Percorsi di Equilibrio P-v - b) Deformata della struttura nelle configurazioni notevoli del percorso di equilibrio (da Iori et.al -2002)

COMPORAMENTO POST CRITICO DEL TELAIO - PERCOSO P-u

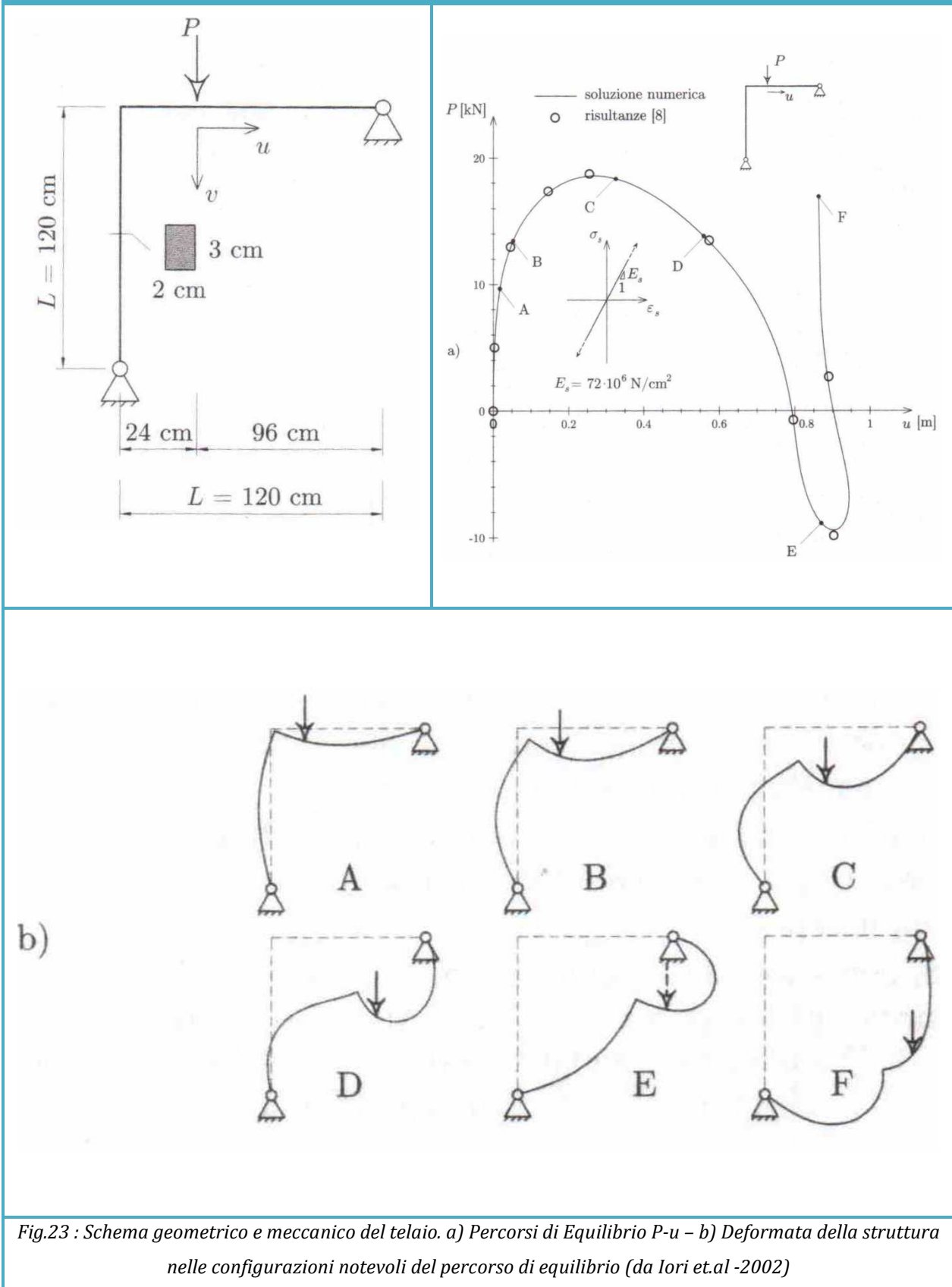


Fig.23 : Schema geometrico e meccanico del telaio. a) Percorsi di Equilibrio P-u - b) Deformata della struttura nelle configurazioni notevoli del percorso di equilibrio (da Iori et.al -2002)

Analisi non lineare FEM con Nolian EE

Per il modello di cui in fig.24, denominato telaio di Koiter Roorda con carico verticale eccentrico e comportamento pre-critico non lineare il valore del carico di collasso con materiale elastico è di circa **19 kN**.

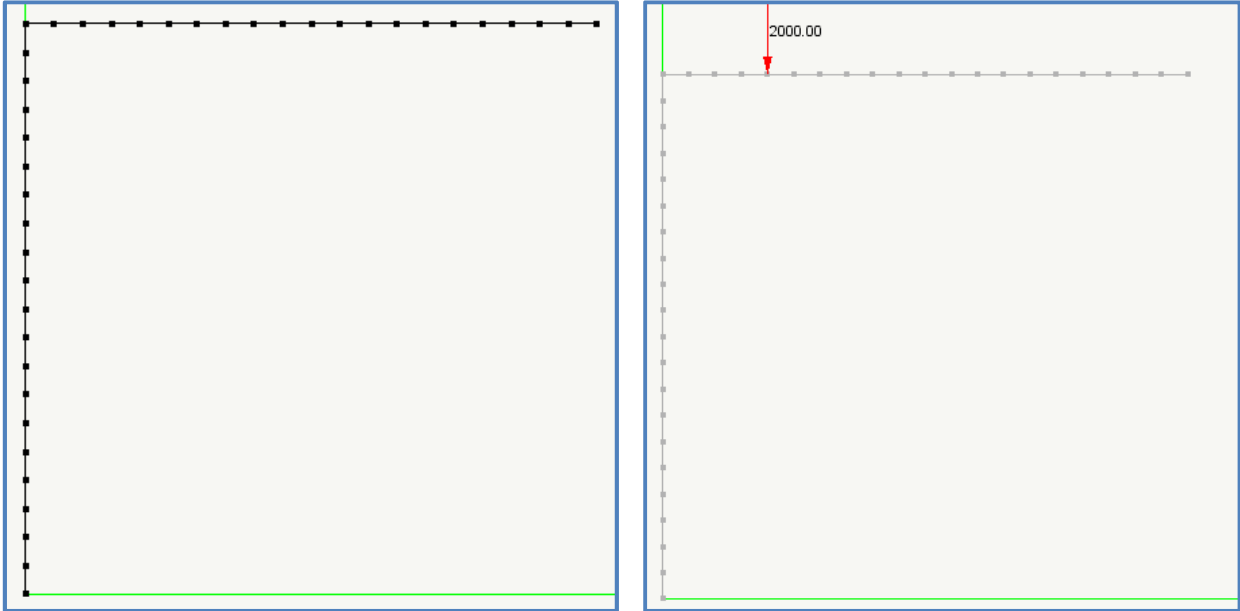


Fig.24 : Modello di Nolian EE – Telaio di Koiter Roorda con carico eccentrico

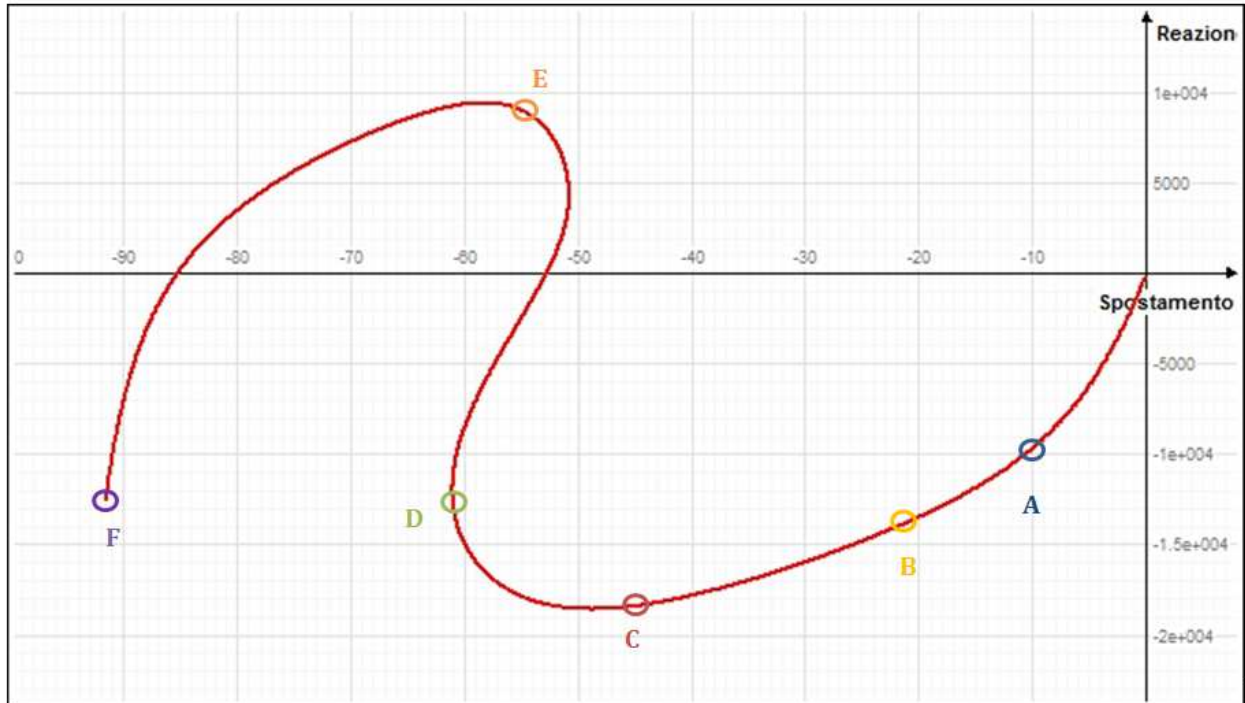
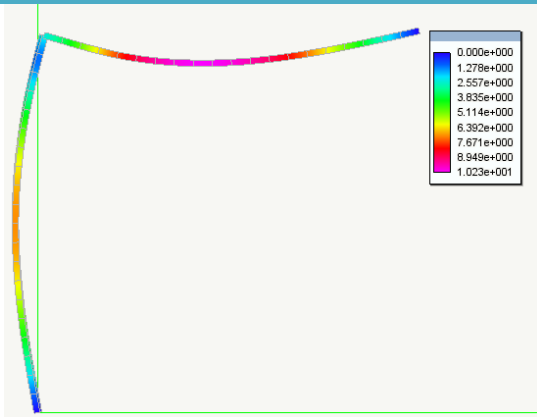


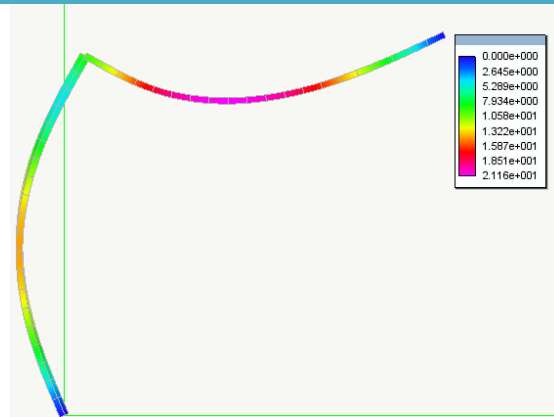
Fig.25 : Percorso di equilibrio post-critico in Nolian EE , il carico di collasso non può superare il valore Euleriano che rappresenta il carico di collasso per piccoli spostamenti, già per moderati spostamenti il valore si riduce

CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO NEI PUNTI NOTEVOLI - MAPPA SPOSTAMENTI

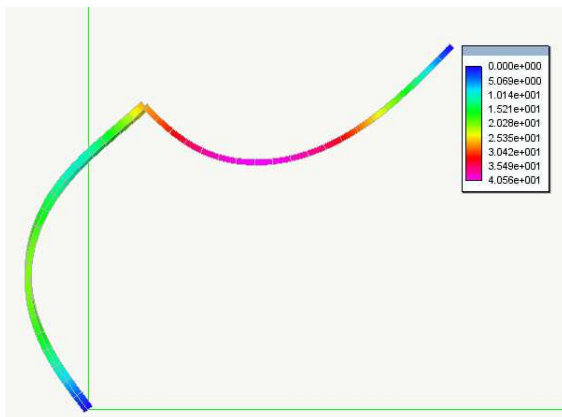
PUNTO A - $V_A=10$ cm ; $P=100$ kN



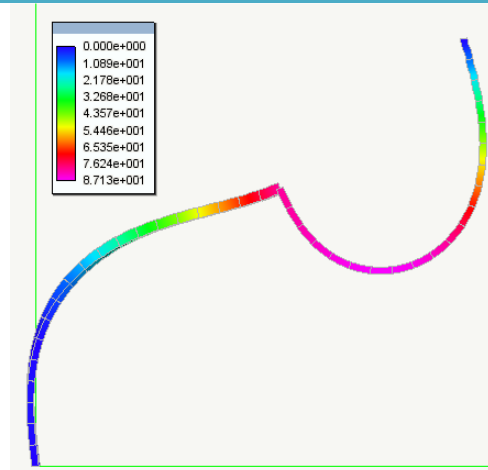
PUNTO B - $V_B=20$ cm ; $P=138$ kN



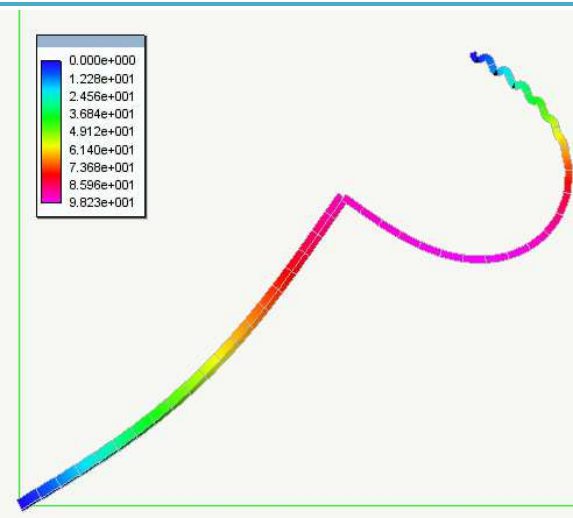
PUNTO C - $V_C=45$ cm ; $P=180$ kN



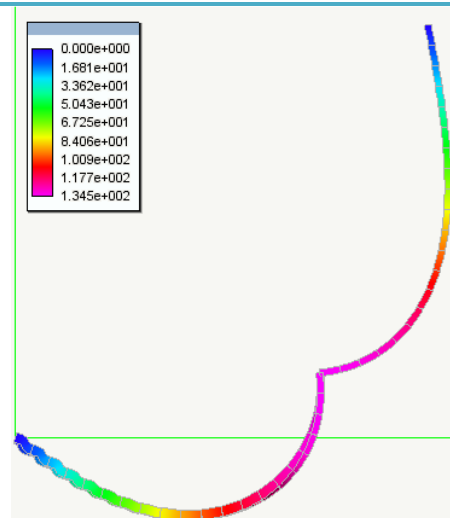
PUNTO D - $V_D=60$ cm ; $P=142$ kN



PUNTO E - $V_E=53$ cm ; $P=-92$ kN



PUNTO F - $V_F=92$ cm ; $P=170$ kN



COMPORTAMENTO POST CRITICO DEL TELAIO ELASTOPLASTICO - PERCOSO P-v

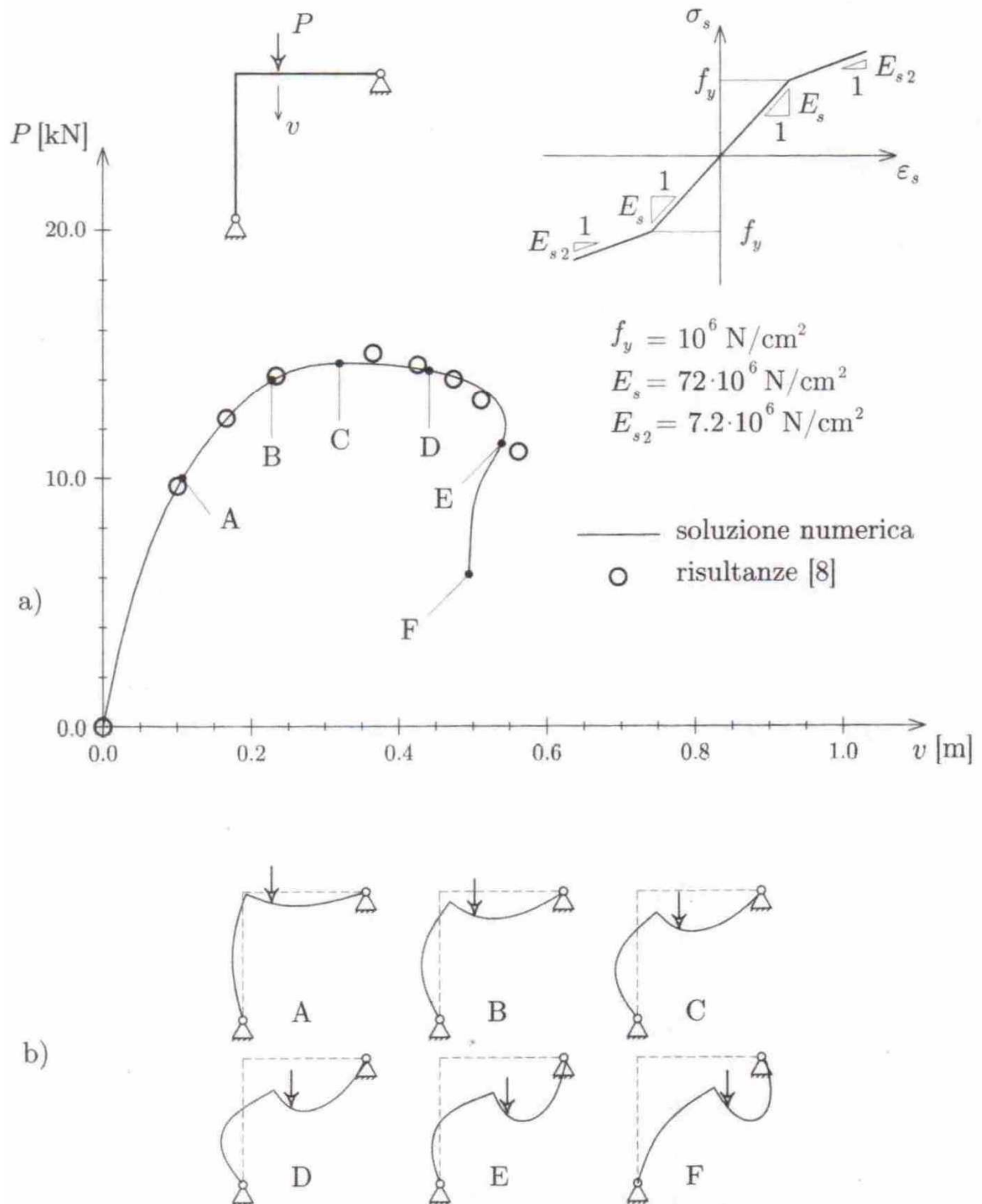


Fig.26 : Schema geometrico e meccanico del telaio. a) Percorsi di Equilibrio P-v - b) Deformata della struttura nelle configurazioni notevoli del percorso di equilibrio (da Iori et.al -2002)

COMPORTAMENTO POST CRITICO DEL TELAIO ELASTOPLASTICO - PERCOSO P-v

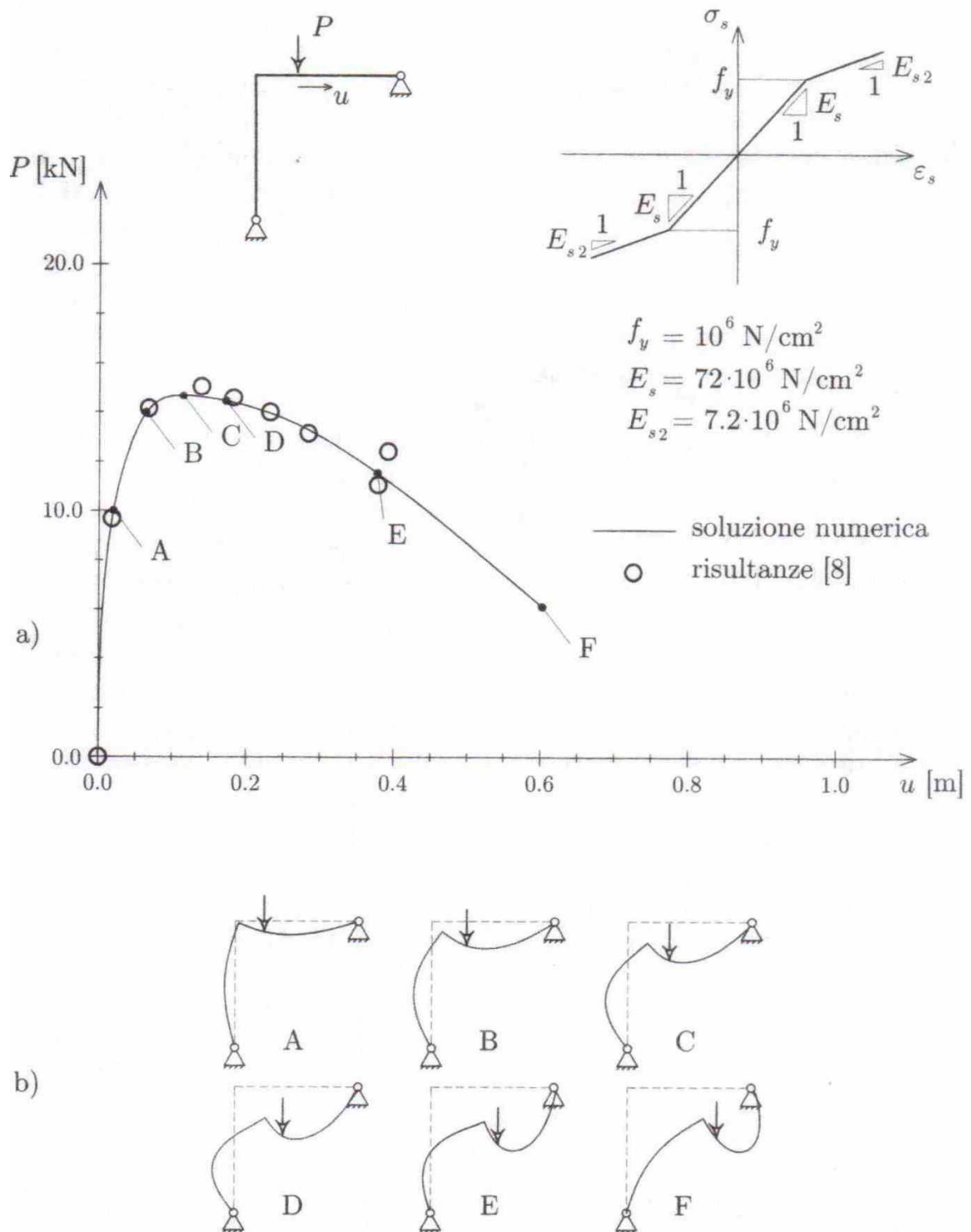


Fig.27 : Schema geometrico e meccanico del telaio. a) Percorsi di Equilibrio P-v - b) Deformata della struttura nelle configurazioni notevoli del percorso di equilibrio (da Iori et.al -2002)

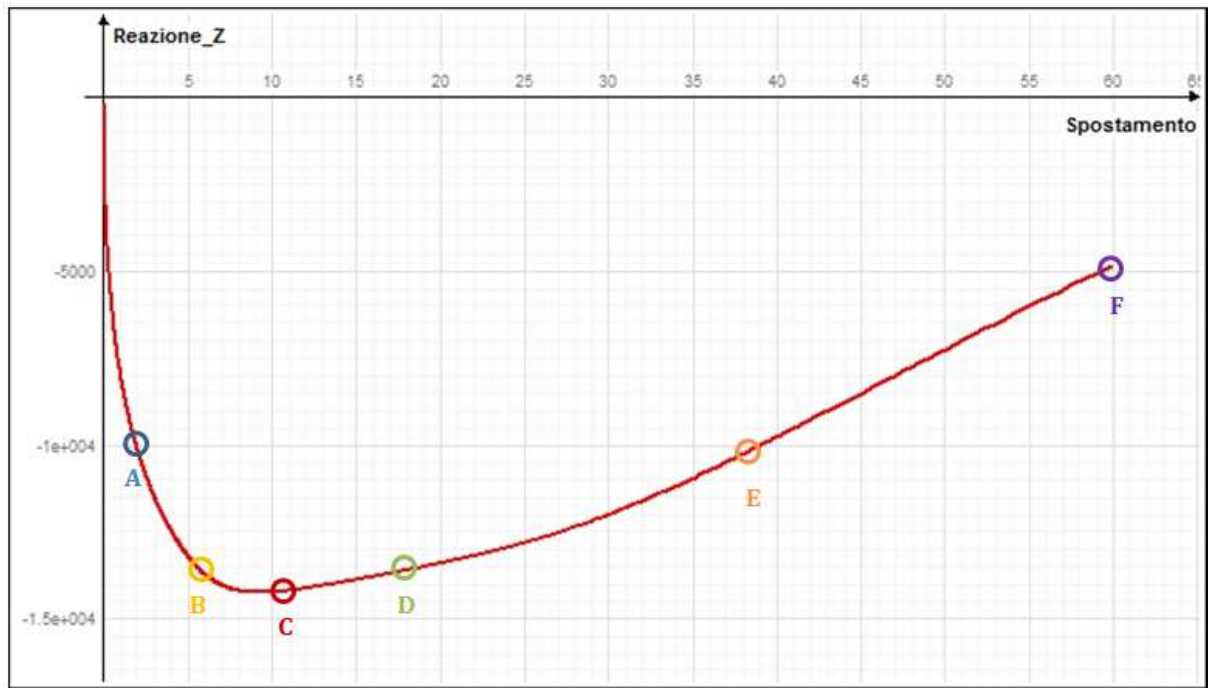
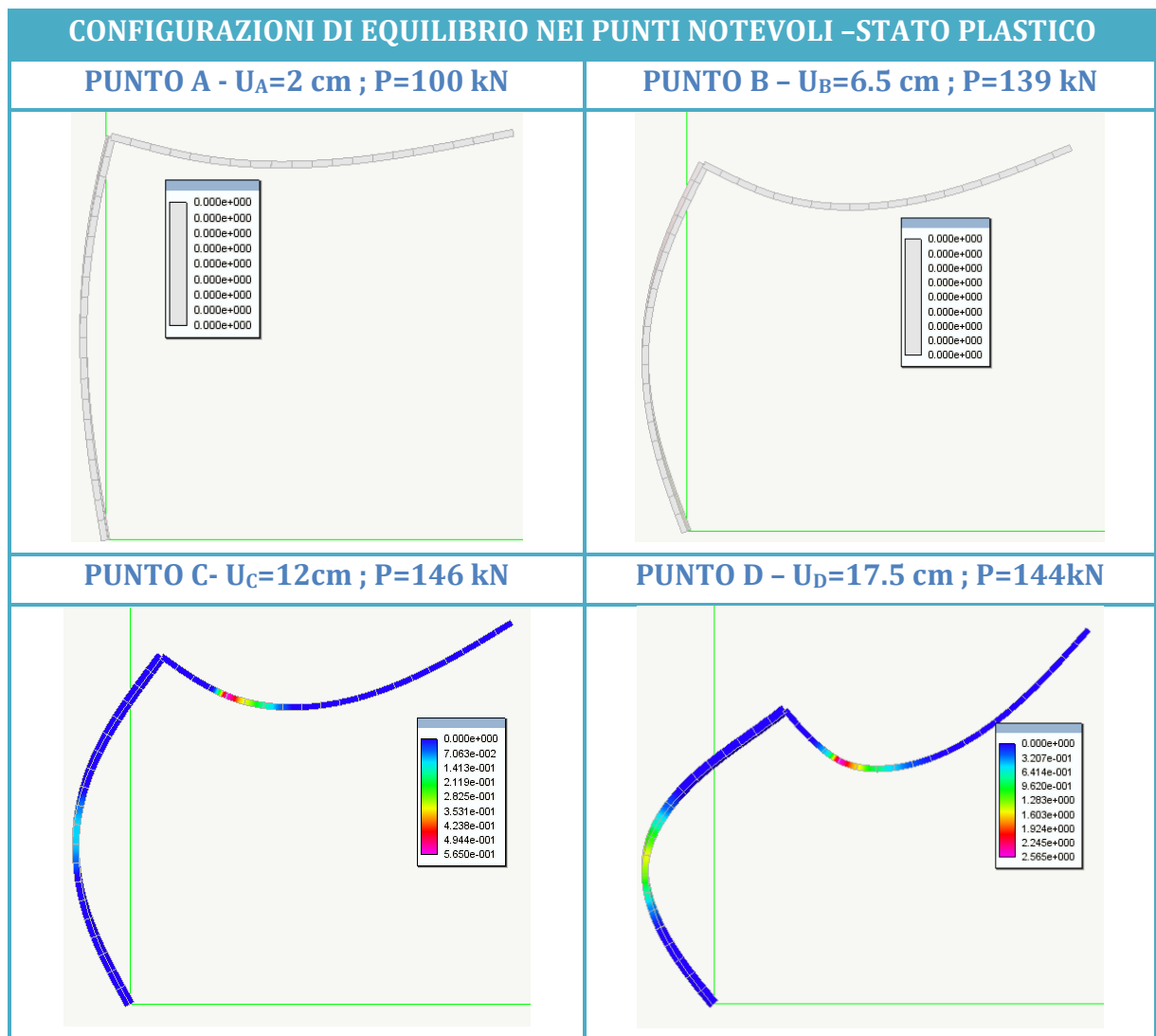
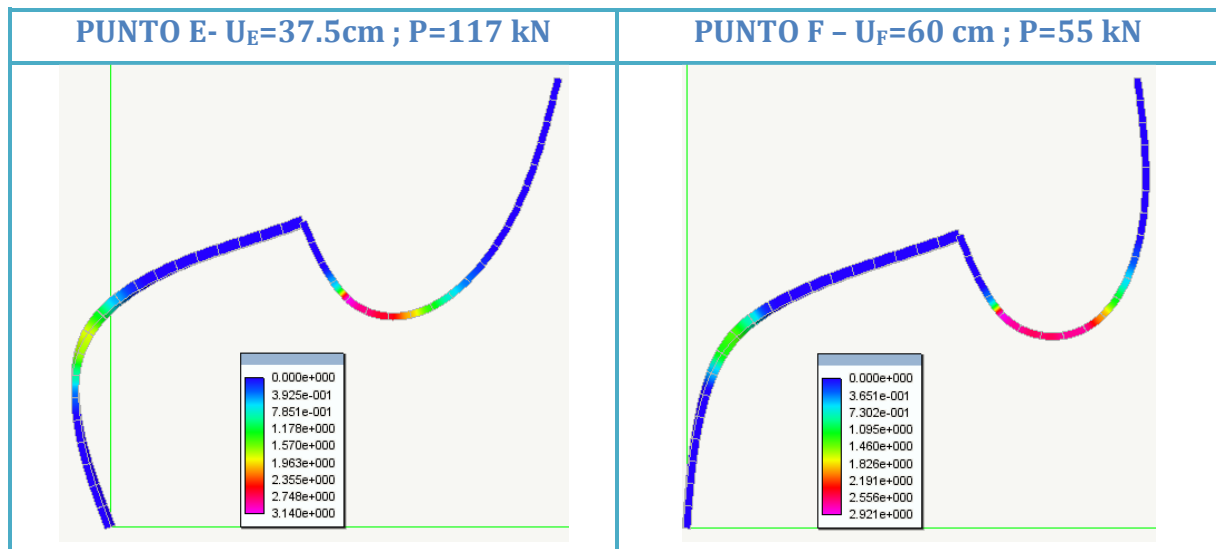


Fig.28 : Percorso di equilibrio post-critico in Nolian EE, il carico di collasso non può superare il valore Euleriano che rappresenta il carico di collasso per piccoli spostamenti, già per moderati spostamenti il valore si riduce





Conclusioni

Dall'analisi in Nòlian EE, otteniamo le curve e le deformate sopra riportate, nelle quali si riscontra il medesimo andamento e quindi comportamento del telaio teorico.

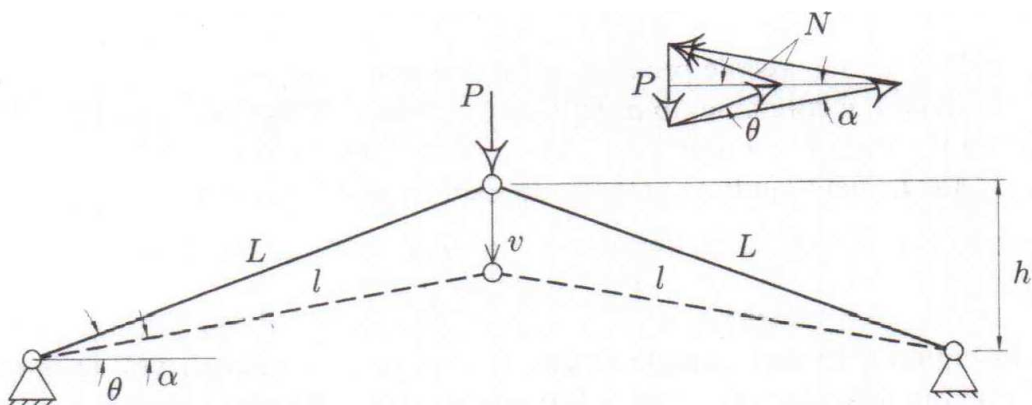
La corrispondenza dei risultati denuncia la corretta implementazione delle equazioni e del solutore adottato, nonché la corretta modellazione della struttura in esame.

3.4. L'arco a tre cerniere

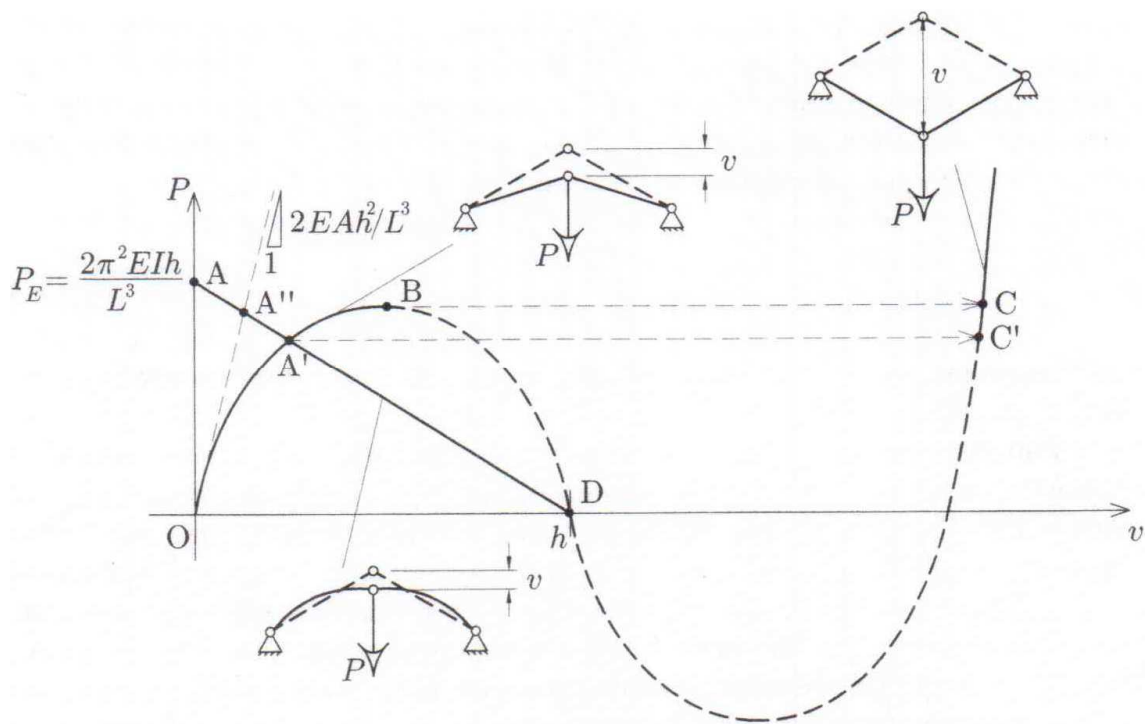
La struttura arco a tre cerniere se ribassato presenta un comportamento non lineare già in fase precritica e al crescere del carico applicato si potrebbe registrare l'instabilità per cedimento progressivo (vedi fig.29). Il comportamento e il tipo di instabilità euleriana (della singola asta) per biforcazione e per cedimento progressivo dell'intera struttura dipende dalla forma dell'arco ossia dalla sua altezza in chiave **h**.

COMPORTAMENTO POST CRITICO DEL ARCO

GEOMETRIA E MODELLO



POSSIBILI FORME D'INSTABILITÀ



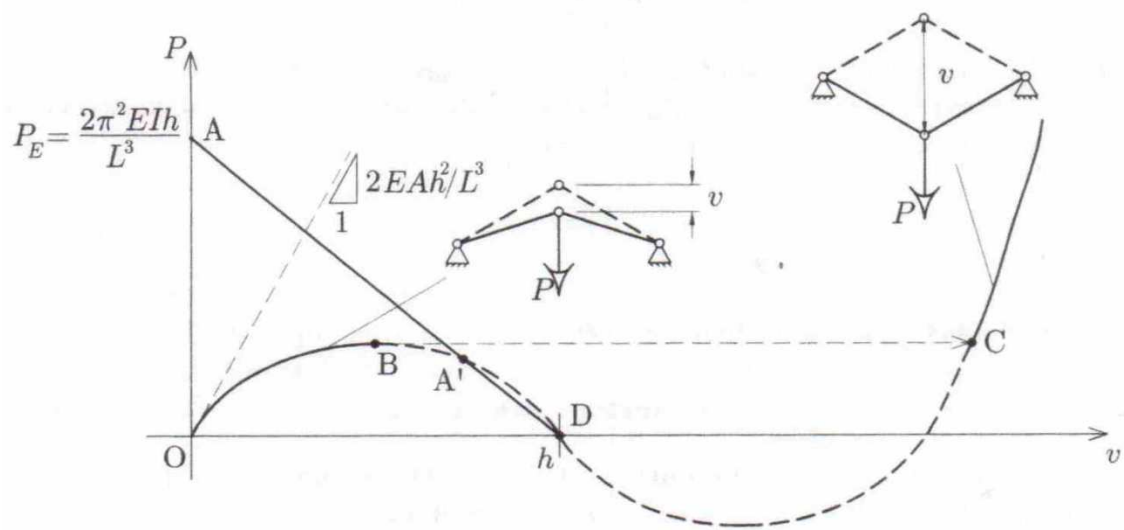
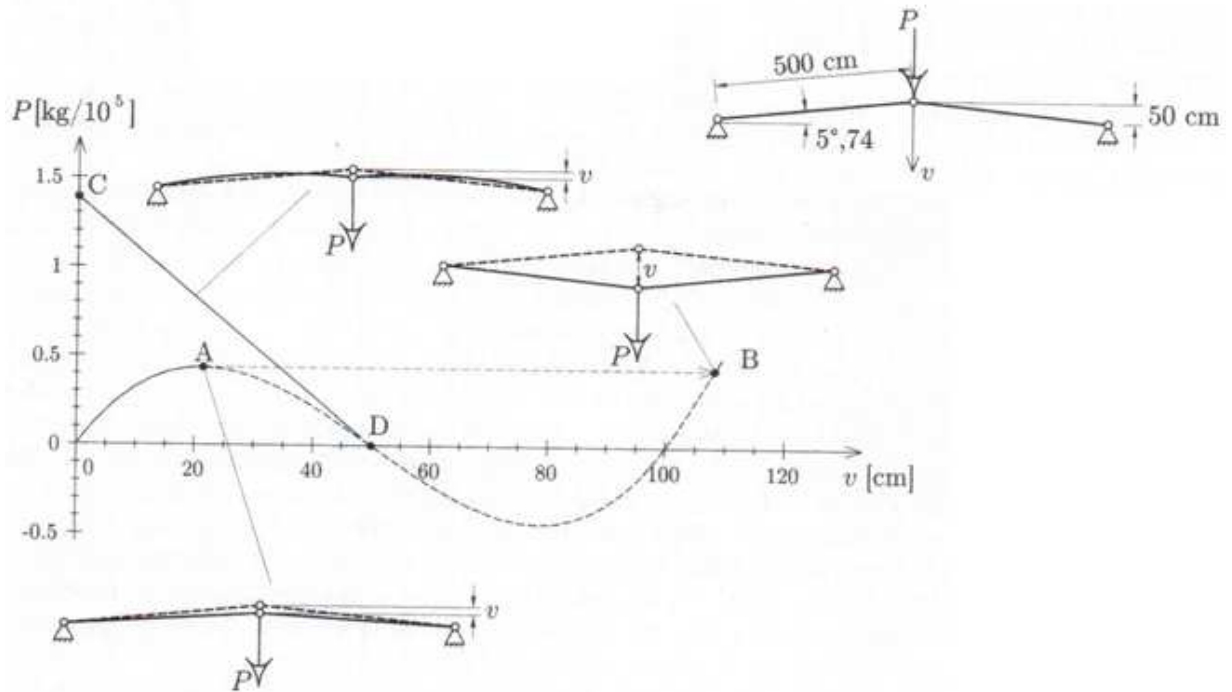


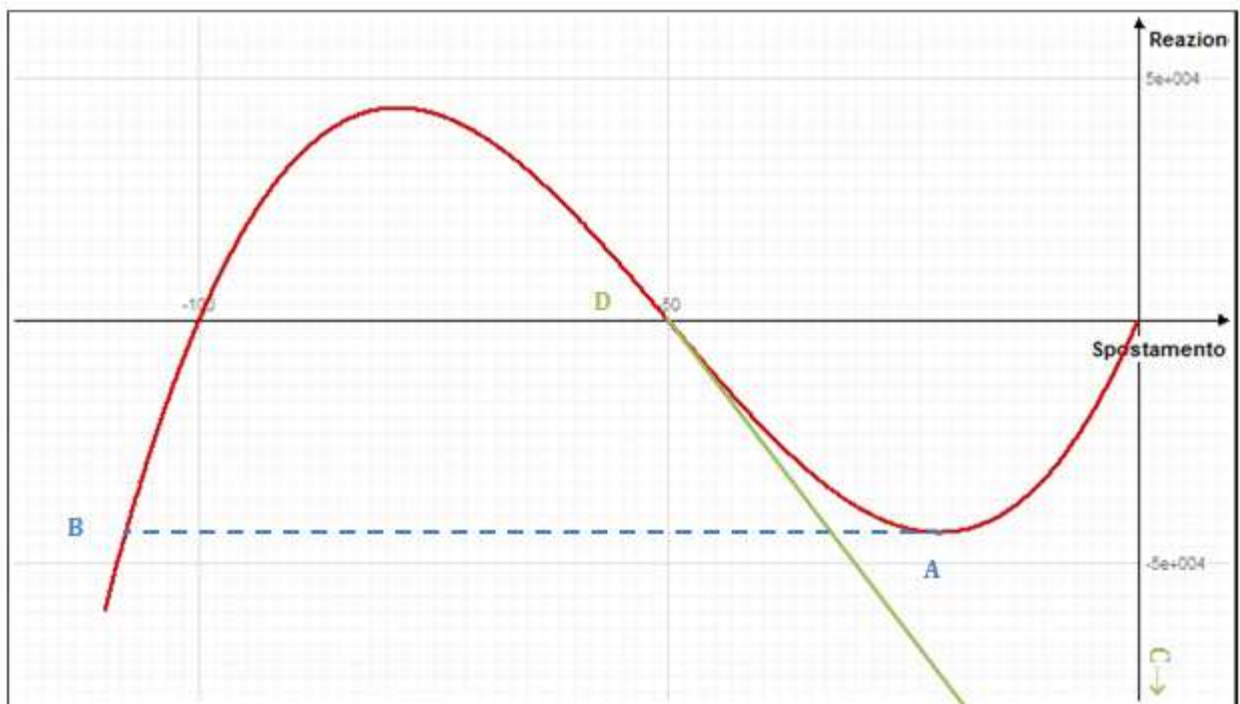
Fig.29 : Schema geometrico e meccanico del telaio. a) Percorsi di Equilibrio P-u - b) Deformata della struttura nelle configurazioni notevoli del percorso di equilibrio (da Iori et.al -2002)

ARCO A TRE CERNIERE: 2° CASI DI STUDIO

ESEMPIO 1



CURVA DI EQUILIBRIO IN NOLIAN EE



ESEMPIO 2

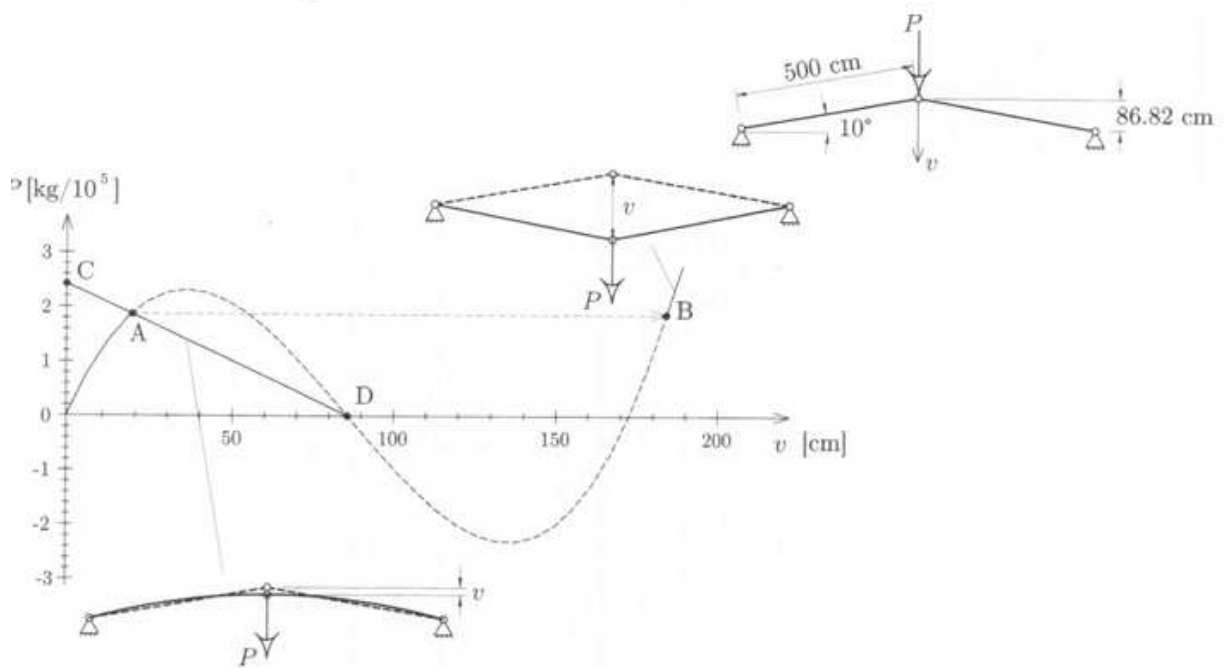
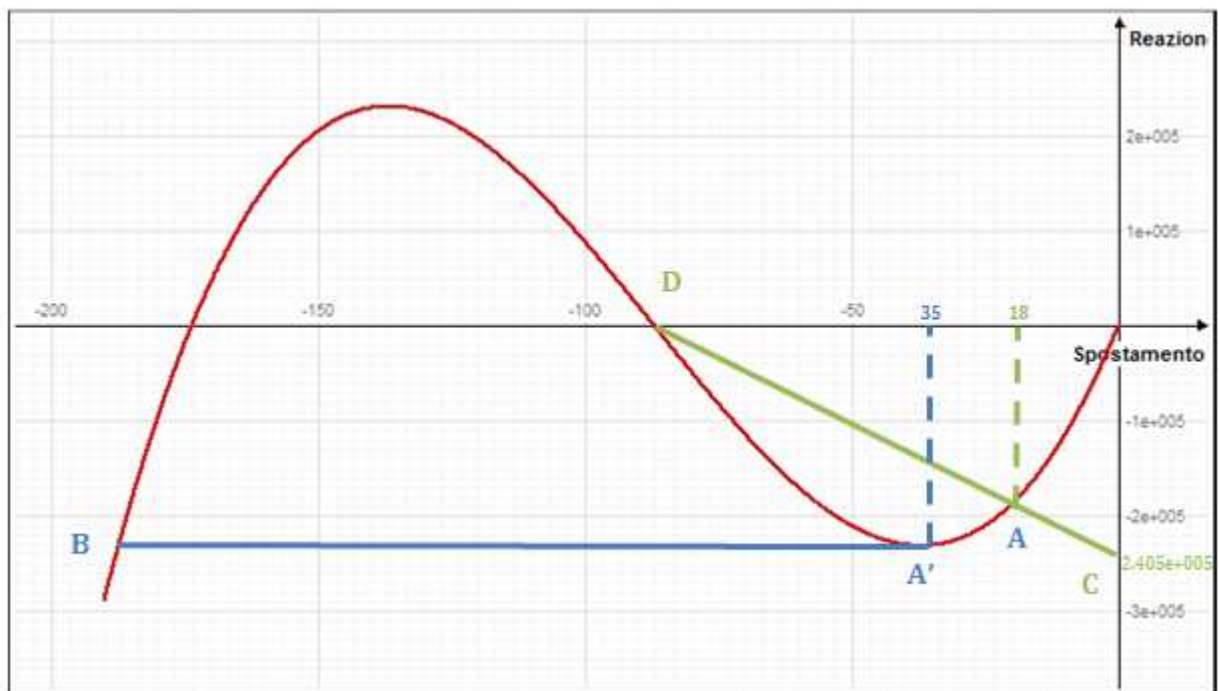
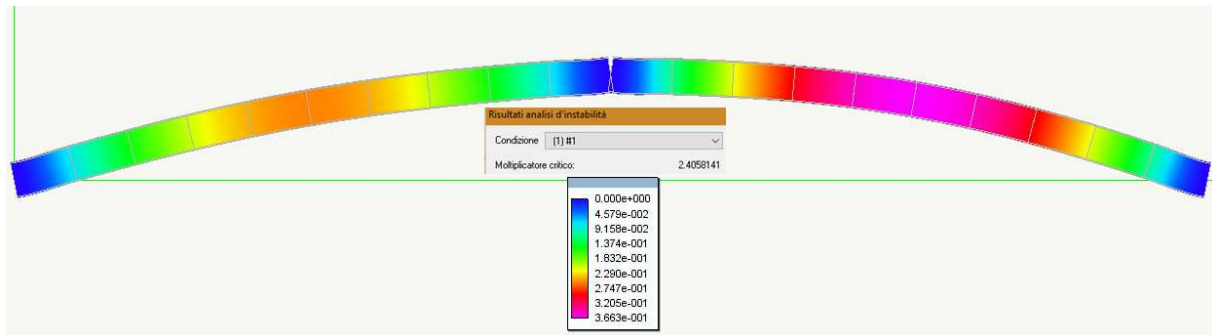


Fig.30 : Schema geometrico e meccanico del telaio. a) Percorsi di Equilibrio P-u - b) Deformata della struttura nelle configurazioni notevoli del percorso di equilibrio (da Iori et.al -2002)

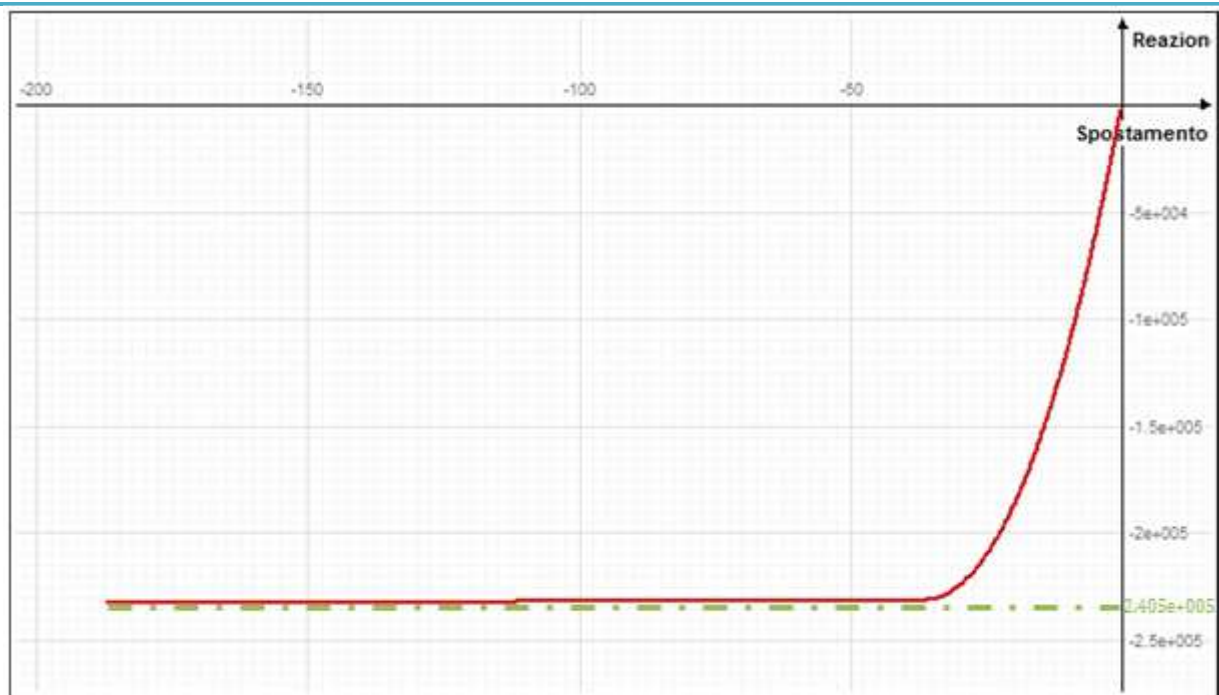
CURVA DI EQUILIBRIO IN NOLIAN EE



LINEAR BUCKLING IN NOLIAN EE → $\lambda_{CRIT}=2.405 \cdot 10^5$ kg



NON LINEAR BUCKLING IN NOLIAN EE



Come si può osservare nei due casi, la risposta numerica ottenuta con Nolian EE è perfettamente sovrapponibile e ripercorre i due tipi di instabilità che possono manifestarsi negli archi a tre cerniere in funzione della geometria soprattutto l'altezza in chiave. Per valori dell'altezza in chiave minori di cm 50 (archi ribassati) l'instabilità avviene per cedimento progressivo, il fenomeno è di tipo dinamico e porta al collasso della struttura, di contro per archi meno ribassati con inclinazione $\geq 10^\circ$ l'instabilità euleriana dell'asta precedere il cedimento progressivo dell'intera struttura con possibilità di collasso di locale che non implica il collasso globale.

Questo esempio nella realtà pratica è fondamentale nei capannoni acciaio molto ribassati con collegamenti a cerniera dove i ritti al più contribuiscono ad aumentare il carico grazie alla rigidità traslazionale ma non il cedimento progressivo, per migliorarne la risposta conviene

fari i nodi di tipo incastro dove la rigidità flessionale delle travi e dei ritti conferisce un maggiore carico di collasso ed il fenomeno del cedimento progressivo è attenuato anche in campo dinamico. D'altro canto avere strutture incastrate per l'acciaio li rende vulnerabili a fenomeni di buckling termico durante incendi o forti escursioni termiche. Tutto questo per ribadire che il progetto di un capannone in acciaio non è una banalità se tali aspetti non vengono presi in considerazione in modo da evitarli o prendere in considerazione tutte le misure di sicurezza.

4. CENNI DI INSTABILITÀ DINAMICA DELLE STRUTTURE A TELAIO

Il fenomeno dell'instabilità fino adesso è stato definito in maniera generica, nel senso che :

- Una configurazione di equilibrio è detta stabile se piccole perturbazioni, inducono oscillazioni di entità limitata nell'intorno della configurazione stessa;
- Una configurazione di equilibrio è detta instabile nel caso contrario.

Tutto ciò non è una definizione completa in quanto se lo studio dell'equilibrio può essere affrontato in ambito statico, la stabilità deve essere studiata in ambito dinamico ed inquadrata all'interno della Teoria generale della stabilità del moto di Liapunov.

Quando un sistema strutturale raggiunge il limite di stabilità si ha la perdita di rigidità nei confronti dei fenomeni deformativi, a questo punto la risposta dinamica perturbata della struttura degenera a causa dell'annullamento di rigidità, e lo studio della risposta in ambito dinamico non lineare permette di studiare in maniera completa l'intero fenomeno.

L'argomento è molto complesso nella sua generalità, per cui discuteremo dei problemi che riguardano la risposta dinamica non lineare di strutture a telaio in presenza di effetti del secondo ordine che possono comportare sotto forzanti sismiche collassi per instabilità.

Come risulta noto la rigidità flessionale dei telai dipende fortemente dallo sforzo assiale di compressione , diminuendo all'aumentare dello stesso, ciò produce un aumento dei periodi propri di oscillazione della struttura modificandone il comportamento dinamico, più lo sforzo si avvicina al valore limite di stabilità per un elemento o l'intera struttura , la stessa diventa molto deformabile e gli effetti geometrici locali $P-\delta$ e globali $P-\Delta$ portano la stessa al collasso per amplificazione degli spostamenti, come nei fenomeni di risonanza.

Per meglio comprendere il fenomeno nel prossimo articolo si riporteranno due esempi di telai in acciaio elastoplastici con effetti geometrici di tipo completo, di cui il primo è un telaio a nodi rigidi spostabili (resistente a momento), il secondo a nodi fissi controventato.

Un saluto e arrivederci al prossimo numero.

BIBLIOGRAFIA

- Leone Corradi Dell'Acqua (2010) : Meccanica delle Strutture 3 Volume: La valutazione della capacità portante. McGraw-Hill (Milano).
- Piero Pozzati e Claudio Ceccoli (1987) :Teoria e Tecnica delle Strutture – Volume III: Sistemi di Travi – Interpretazione del collasso. UTET.
- Alberto Carpinteri (1998): Analisi non lineare delle Strutture- Pitagora Editrice Bologna
- Daniele Ferretti, Ivo Iori, Marco Morini(2002): La stabilità delle Strutture – Il caso delle Costruzioni in cemento Armato. McGraw-Hill (Milano).
- Nòlian All-in One : Manuale Teorico e Manuale EE (Softing. Srl- Roma);
- Bazant .Z, Cedolin.L (2010): Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. World Scientific (London).
- Stephen P. Timoshenko and James M. Gere –II Edition: Theory of Elastic Stability. Dover Publications Inc. Mineola New York.